

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 537.877

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ (підпис)

_____ (ініціали, прізвище)

“ ” _____ 2018 р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності (спеціалізації) 104 фізика та астрономія
(код і назва спеціальності)

Комп'ютерне моделювання фізичних процесів

на тему: «Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному
хвилеводі» _____

Виконав (-ла): студент 2 курсу магістерського рівня, групи ОФ-71мп
(шифр групи)

Гартман Ігор Юрійович

_____ (прізвище, ім'я, по батькові)

_____ (підпис)

Науковий керівник д. ф.-м. н., професор Герасимчук В.С
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Консультант _____
(назва розділу) (науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

_____ (підпис)

Рецензент д. ф.-м. н., професор Горшков В.М.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____
(підпис)

Київ – 2018 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) 104 фізика та астрономія
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри

(підпис) (ініціали, прізвище)
«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Гартману Ігорю Юрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації: Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі _____

науковий керівник дисертації Герасимчук Віктор Семенович, доктор фізико-математичних наук, професор _____,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__ р. № _____

2. Строк подання студентом дисертації _____

3. Об'єкт дослідження: Нелінійні хвилі в нелінійному оптичному хвилеводі.

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за освітньо-професійною програмою) Локалізація нелінійних хвиль в нелінійному оптичному хвилеводі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) Опрацювати наукову статтю «Spontaneous symmetry breaking in a nonlinear double-well structure» (Thawatchai Mayteevarunyoo, Boris A. Malomed, and Guangjiong Dong).

2) Опрацювати наукову статтю «Interaction of solitons with localized nonlinear defects» (M. T. Primatarowa, R. S. Kamburova and K. T. Stoychev).

3) Опрацювати наукову статтю «Strong NLS soliton–defect interactions» (Roy H. Goodman, Philip J. Holmes, Michael I. Weinstein).

4) Вивести нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) з рівняння Максвела для системи періодичних нелінійних хвилеводів, між якими знаходиться лінійне середовище

5) Ознайомитися з чисельними методами для моделювання параболічних рівнянь, зокрема, з методом скінчених різниць, та методом прогонки для розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

6) Написати програму для знаходження чисельних розв’язків НРШ за допомогою методу скінчених різниць.

7) Написати програму для побудови трьохвимірних рисунків по результатах обчислень

8) Проаналізувати стійкість розв’язків НРШ в залежності від параметрів системи та параметрів електричного поля.

6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу слайди, графіки _____

7. Дата видачі завдання 3 вересня 2018 року _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Опрацювання статті «Spontaneous symmetry breaking in a nonlinear double-well structure» (Thawatchai Maytevarunyoo, Boris A. Malomed, and Guangjiong Dong).	03.09.2018-14.09.2018	
2.	Опрацювання статті «Interaction of solitons with localized nonlinear defects» (M. T. Primatarowa, R. S. Kamburova and K. T. Stoychev).	15.09.2018-23.09.2018	
3.	Опрацювання статті «Strong NLS soliton–defect interactions» (Roy H. Goodman, Philip J. Holmes, Michael I. Weinstein).	24.09.2018-08.10.2018	
4.	Виведення нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) з рівняння Максвела для системи періодичних нелінійних хвильоводів, між якими знаходиться лінійне середовище	09.10.2018-17.10.2018	
5.	Ознайомлення з чисельними методами для моделювання параболічних рівнянь, зокрема, з методом скінчених різниць, та методом прогонки для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.	18.10.2018-22.10.2018	
6.	Написання програми для знаходження чисельних розв'язків НРШ за допомогою методу скінчених різниць.	23.10.2018-06.11.2018	
7.	Написати програму для побудови трьохвимірних рисунків по результатам обчислень.	07.11.2018-12.11.2018	
8.	Аналіз стійкості розв'язків НРШ в залежності від параметрів системи та параметрів електричного поля.	13.11.2018-25.11.2018	
9.	Оформлення магістерської дисертації		

Студент

(підпис)

І.Ю.Гартман

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

(підпис)

В.С. Герасимчук

(ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі

Актуальність: останнім часом значна увага приділяється теоретичним і експериментальним дослідженням просторової локалізації світлових пучків великої потужності. Запропонована для магістерської дисертації задача будується на моделі, яка використовується у широкому діапазоні фізичних застосувань: в нелінійній динаміці твердих тіл, фотонних і магнонних кристалах, модульованих (шаруватих) середовищах з періодичною системою нелінійних хвилеводів (інтерфейсів), магнітних багат шарових структурах з масивом плоских магнітних дефектів і таке інше. Дане дослідження може бути корисним також для опису відповідних систем як в нелінійній оптиці, так і в теорії конденсату Бозе-Ейнштейна.

Мета дослідження: аналіз стійкості нелінійних станів поблизу нелінійного оптичного хвилевода.

Завдання дослідження: побудувати математичну модель, яка описує процес поширення електромагнітних хвиль вздовж нелінійного оптичного хвилеводу, знайти аналітичні розв'язки для локалізованих станів та провести чисельний аналіз стійкості локалізованих станів.

Об'єкт дослідження: нелінійні хвилі в нелінійному оптичному хвилеводі

Предмет дослідження: локалізація нелінійних хвиль в нелінійному оптичному хвилеводі

Методи дослідження: аналітичний, чисельний (метод скінчених різниць).

Наукова новизна одержаних результатів: проаналізована стійкість локалізованих станів нелінійних хвиль у лінійному середовищі з лінійним та нелінійним дефектами

Результати дослідження: проведено аналіз стійкості локалізованих станів в залежності від параметрів електричного поля, характеристик середовища та дефекту.

Галузь застосування: нелінійна динаміка твердих тіл, фотонні і магнонні кристали, модуляційні (шаруваті середовища) з періодичною системою нелінійних хвильоводів (дефектні шари), магнітні багат шарові структури з масивом плоских магнітних дефектів, теорія конденсату Бозе-Ейнштейна.

Апробація результатів дисертації:

1) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Konotopchyk O.V., Loboda I.Yu. Exact solution for localized states of nonlinear waves in the structured anharmonic media with two interfaces // Proceedings of the 2018 IEEE 8th International Conference on Nanomaterials: Applications & Properties (NAP – 2018), Zatoka, Ukraine, September 9–14, 2018, Part 1, 01SPN79-4.

2) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Loboda I.Yu. Localization of nonlinear waves near a nonlinear interface // 5th International Conference “Nanotechnologies” (Nano–2018), Tbilisi, Georgia, November 19–22, Abstracts, P. 54.

Публікації:

1) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Konotopchyk O.V., Loboda I.Yu. Exact solution for localized states of nonlinear waves in the structured anharmonic media with two interfaces // Proceedings of the 2018 IEEE 8th International Conference on Nanomaterials: Applications & Properties (NAP – 2018), Zatoka, Ukraine, September 9–14, 2018, Part 1, 01SPN79-4.

2) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Loboda I.Yu. Localization of nonlinear waves near a nonlinear interface // 5th International Conference “Nanotechnologies” (Nano–2018), Tbilisi, Georgia, November 19–22, Abstracts, P. 54.

Ключові слова: нелінійне рівняння Шредінгера, локалізований стан, солітонний стан, оптичний хвильовод, дефектний шар.

Структура роботи: робота містить 73 сторінок і 26 рисунків. Список використаних джерел містить 42 найменування.

Abstract

Localization of nonlinear stationary waves near a nonlinear optical waveguide

Relevance: The study of propagation and the character of localization of nonlinear waves in periodic and modulated systems is one of the main problems of the dynamics of nonlinear waves and solitons. Among others, a considerable attention is paid to theoretical and experimental investigations of spatial localization of high power light beams. The present study can be useful for the description of corresponding systems both in optics and in Bose-Einstein condensation. The proposed model can be used in a wide range of physical applications: in nonlinear dynamics of solids, photonic and magnonic crystals, modulated (layered) media with a periodic system of nonlinear waveguides (defect layers), magnetic multilayers with an array of plane magnetic defects, etc.

The purpose of the research: analysis of the stability of nonlinear states near a nonlinear optical waveguide.

Object of research: nonlinear waves in a nonlinear optical waveguide.

Subject of research: localization of nonlinear waves in a nonlinear optical waveguide.

Objectives of the study: to construct a mathematical model that describes the process of propagation of electromagnetic waves along a nonlinear optical waveguide, to find analytic solutions for localized states and to carry out numerical analysis of the stability of localized states.

Methods of research: analytical, numerical (finite-difference method)

Novelty of results: the stability of localized states of nonlinear waves in a linear environment with linear and nonlinear defects was analyzed.

Results of the research: the stability of localized states was analyzed, depending on the parameters of the electric field, environment and defect.

Publications:

1) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Konotopchyk O.V., Loboda I.Yu. Exact solution for localized states of nonlinear waves in the structured anharmonic media with two interfaces // Proceedings of the 2018 IEEE 8th International Conference on Nanomaterials: Applications & Properties (NAP – 2018), Zatoka, Ukraine, September 9–14, 2018, Part 1, 01SPN79-4.

2) Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I.V., Loboda I.Yu. Localization of nonlinear waves near a nonlinear interface // 5th International Conference “Nanotechnologies” (Nano–2018), Tbilisi, Georgia, November 19–22, Abstracts, P. 54.

Field of application: nonlinear dynamics of solids, photonic and magnon crystals, modulation (layered media) with a periodic system of nonlinear waveguides (defective layers), magnetic multilayer structures with an array of plane magnetic defects, Bose-Einstein condensate theory.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, localized state, soliton state, optical waveguide, defect layer.

The paper contains: used literature - 42, pages: - 73, drawings - 26 .

Анотація

на тему: «Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі» студента 2 курсу магістерського рівня, групи

ОФ-71мп, ФМФ, НТУУ КПІ ім. І. Сікорського

Гартмана Ігоря Юрійовича

Науковий керівник: д. ф.-м. н., професор Герасимчук В.С

Актуальність: Останнім часом значна увага приділяється теоретичним і експериментальним дослідженням просторової локалізації світлових пучків великої потужності. Запропонована для магістерської дисертації задача будується на моделі, яка використовується у широкому діапазоні фізичних застосувань: в нелінійній динаміці твердих тіл, фотонних і магнонних кристалах, модульованих (шаруватих) середовищах з періодичною системою нелінійних хвилеводів (інтерфейсів), магнітних багат шарових структурах з масивом плоских магнітних дефектів і таке інше. Дане дослідження може бути корисним також для опису відповідних систем як в нелінійній оптиці, так і в теорії конденсату Бозе-Ейнштейна.

Постановка проблеми: Провести розрахунки і аналіз усіх можливих солітонних станів, локалізованих біля нелінійного оптичного хвилеводу в оптично лінійному середовищі в рамках нелінійного рівняння Шредінгера з дельта-функціональним потенціалом, який включає як лінійні, так і нелінійні просторові збурення.

Шляхи вирішення проблеми: аналітичне розв'язання рівняння Шредінгера з різними потенціалами та його чисельне моделювання при різних значеннях параметрів досліджуваної системи.

Результати та висновки: За допомогою запропонованої аналітичної моделі обраховано можливі солітонні стани, локалізовані поблизу нелінійного хвилеводу в оптично-лінійному середовищі. Для усіх локалізованих станів знайдено загальну кількість елементарних збуджень і загальну енергію.

Проведений чисельний аналіз стійкості локалізованих станів. Проведено аналіз і порівняння аналітичних результатів і результатів комп'ютерної симуляції.

Annotation

On the theme: "Localization of nonlinear stationary waves near a nonlinear optical Waveguide", student 2nd year master's degree, group OF-71mp, FMF, NTUU

KPI them. Sikorsky

Hartman Ihor Yuriyovych

Scientific supervisor: Dr.of Phys.-Math. Sc. Gerasimchuk V.S.

On the theme: "Localization of nonlinear stationary waves near a nonlinear optical Waveguide"

Relevance: A considerable attention is paid to theoretical and experimental investigations of spatial localization of high power light beams. The problem proposed for a master's thesis is based on a model that is used in a wide range of physical applications: in nonlinear dynamics of solids, photonic and magnonic crystals, modulated (layered) media with a periodic system of nonlinear waveguides (interfaces), magnetic multilayers with an array of plane magnetic defects, etc. The present study can be useful for the description of corresponding systems both in optics and in Bose-Einstein condensation.

Problem revisous: Study all the possible soliton states localized near a nonlinear optical waveguide in optically linear medium in the framework of the nonlinear Schrödinger equation with delta-functional potential containing both linear and nonlinear spatial perturbations

Solutions to the problem: Analytical solving the Schrödinger equation with different potentials and numerical simulation of this equation with different values of parameters.

Results and conclusions: All the possible soliton states localized near the nonlinear waveguide were described with the help of the proposed analytical model in an optical linear medium. For all possible localized states, the total number of elementary excitations and total energy of the system were found and analyzed. The analysis of the stability of localized states is carried out numerically. The analysis and comparison of analytical results and results of computer simulation are carried out.

РЕЦЕНЗІЯ
на магістерську дисертацію
на здобуття ступеня магістра
(бакалавра/магістра)

виконаний (-у) на тему: «Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі» _____

студентом (-кою) Гартманом Ігорем Юрійовичем. _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

Одним з основних завдань динаміки нелінійних хвиль є дослідження умов розповсюдження і характеру локалізації нелінійних хвиль в періодичних і модульованих системах. Значна увага приділяється теоретичним і експериментальним дослідженням просторової локалізації світлових пучків великої потужності. Дане дослідження може бути корисним для опису відповідних систем як в оптиці, так і в теорії конденсату Бозе-Ейнштейна.

Запропонована модель актуальна для широкого діапазону фізичних застосувань: в нелінійній динаміці твердих тіл, фотонних і магнонних кристалах, модуляційних (шаруватих) середовищах з періодичною системою нелінійних хвилеводів (дефектні шари), магнітних багат шарових структурах з масивом плоских магнітні дефекти і т. д.

В розділі 1 проводиться огляд літератури, яка є класичною в даній області, розглядаються стани, відмінні від тих, що в даній роботі. В розділі 2 йдеться про побудову математичної моделі, яка описує поширення нелінійних хвиль в нелінійному оптичному хвилеводі. З рівнянь Максвела для електричного поля отримується нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ), яке є центральним рівнянням даної роботи. В розділі 3 за допомогою запропонованої аналітичної моделі в оптично-лінійному середовищі знаходяться всі можливі солітонні стани, локалізовані поблизу нелінійного хвилеводу. Досліджено випадки, коли хвилевод описується лише нелінійним членом і коли при описі хвилеводу враховуються як лінійні, так і нелінійні вклади. У розділі 4 за допомогою чисельної моделі була проаналізована стійкість локалізованих станів. Було показано, що при окремому розгляді кожного з дефектів при додатних значеннях

потужностей дефектів локалізовані стани стійкі, при від'ємних значеннях нестійкі. Розглянуті випадки з різними комбінаціями лінійних та нелінійних, відштовхуючих та притягуючих дефектів.

Робота виконана в повному обсязі, згідно з завданням.

На мій погляд, робота заслуговує оцінки «___», а її автору Гартману Ігорю Юрійовичу може бути присвоєно кваліфікацію „магістр” за спеціальністю «Фізика».

Рецензент

(посада, науковий ступінь, вчене звання)

(підпис)

(ініціали, прізвище)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	11
РОЗДІЛ 1. Моделі солітоно-дефектних взаємодій, які описуються нелінійним рівнянням Шредінгера	14
1.1. Загальний огляд проблеми	14
1.2. Нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) з точковим дефектом.....	15
1.3. Властивості НРШ та його розв'язків	18
1.3.1. Структурні властивості НРШ	18
1.3.2. Нелінійні зв'язані стани.....	18
1.4. Пряме чисельне моделювання ДРЧП	19
1.4.1. Аналіз результатів	23
РОЗДІЛ 2. Нелінійні хвилі в модульованих оптичних середовищах. Виведення основних рівнянь.....	27
РОЗДІЛ 3. Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі. Аналітичні розв'язки.....	34
3.1. Модель з лінійним дефектом	34
3.2. Модель з нелінійним дефектом	35
3.3. Модель з лінійним та нелінійним дефектами.....	35
РОЗДІЛ 4. Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі. Чисельні розв'язки	41
4.1. Постановка задачі.....	41
4.2. Різницева схема	41
4.3. Метод прогонки.....	46
4.4. Алгоритм програми для розв'язку НРШ	48

4.5. Аналіз похибок	49
4.6. Результати чисельних експериментів	51
ВИСНОВКИ.....	60
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	61
ДОДАТОК А. Код програми на Java для розв’язування НРШ	65
ДОДАТОК Б. Код програми на Python для побудови 3D-графіків	73

ВСТУП

Дослідження характеру локалізації та умов розповсюдження нелінійних хвиль у періодичних і модульованих системах є одним з пріоритетних завдань фізики нелінійних хвиль. Останнім часом значна увага приділяється теоретичним і експериментальним дослідженням просторової локалізації світлових пучків великої потужності. Локалізація світлового потоку в напрямку, перпендикулярному напрямку його поширення, внаслідок нелінійного ефекту Керра в нелінійному однорідному оптичному середовищі була відкрита і теоретично описана в роботах [1,2]. Також теоретично [3-5] було показано, що в системі паралельних плоских хвилеводів з нелінійністю Керра можлива локалізація оптичного пучка в кількох сусідніх хвилеводах (формування просторового суперсолітону). Така суперлокалізація світлового потоку експериментально спостерігалась в роботі [6], а результати порівнювались з феноменологічною дискретною моделлю [3].

Однак, оскільки амплітуда поля в хвилеводах значно вища, ніж середня амплітуда по великим областям зі слабкою взаємодією з хвилеводами, нелінійні члени Керра можуть бути враховані тільки в області самих хвилеводів. Крім того, внаслідок симетрії в системах з квадратичною нелінійністю нелінійні члени слід розглядати лише в межах хвилеводів [7]. Аналогічно описується система оптичних хвилеводів у вакуумі. У цьому випадку середовище за межами хвилеводів є лінійним за визначенням. Приклад такої системи було розглянуто в роботі [8], де оптичні хвилеводи описуються лише нелінійними членами.

Розглядаючи оптичні хвилеводи як плоскі дефектні шари, що знаходяться в нелінійному середовищі, знайдено умови існування можливих зв'язаних станів (солітонів), локалізованих біля дефектних шарів, які володіють лінійними [7] та нелійними [9] властивостями. На основі схеми, запропонованої Вахітовим-Колоколовим [10] проведено аналіз стабільності таких локалізованих станів відносно малих збурень амплітуди та фази.

У всіх цих дослідженнях ефективним є застосування нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ). Зазначимо, що ефективне НРШ у свій час використовувалось для опису динаміки колективних внутрішньо молекулярних збуджень (так званих солітонів Давидова) в довгих полімерних ланцюжках [11]. Нелінійним рівнянням Шредінгера описуються також нелінійні періодичні системи, такі як фотонні кристали або конденсат Бозе-Ейнштейна (БЕК), реалізовані в оптичних ґратках [12].

На основі нелінійного рівняння Шредінгера вивчалось також розсіювання квантової частинки на потенціалі, який включає δ -функцію, амплітуда якої є нелінійною хвильовою функцією [13]. Модель, засновану на НРШ з нелінійністю (тяжіння або відштовхування) [7-9], зосередженою в одній точці або в симетричній системі двох точок, які представлені, відповідно, однієї δ -функцією або комбінацією з двох δ -функцій розглянуто в [14]. З додатнім або від'ємним знаком нелінійності, ця модель призводить до звичайних солітонів або щілинних солітони, які перебувають, відповідно, в напівнескінчених або скінчених зонах лінійного спектру системи, будучи закріпленими на δ -функції. Проведено аналіз стабільності солітонів за критерієм Вахітова-Колоколова [10]. Продемонстрована [14] нестабільність солітонного стану, що підтримується чисто нелінійним дефектом і можливість його стабілізації лінійними потенціалами. В роботі [15] стабільність солітонів досліджено за допомогою систематичного чисельного моделювання їх збуреної еволюції у комбінованих лінійних і нелінійних ґраткових потенціалах. Автори дійшли висновку, що критерій Вахітова-Колоколова повністю визначає фактичну стабільність звичайних солітонів.

Також досліджуються локалізовані стани нелінійних хвиль (солітони), що поширюються уздовж нелінійного оптичного хвилеводу (дефектний шар). У рамках нелінійного рівняння Шредінгера з δ -функціональним потенціалом, що містить як лінійні, так і нелінійні просторові збурення, вивчаються можливі солітонні стани, локалізовані біля нелінійного оптичного хвилеводу в оптично лінійному середовищі.

В даній роботі, в рамках дослідження локалізації хвиль в системах з нелінійністю Керра в оптичних хвилеводах, досліджується локалізація солітонних станів поблизу нелінійного хвилеводу (дефектного шару) і описуються можливі локалізовані моди в такій системі. Через локалізацію хвилі в плоскому хвилеводі (або локалізацію осциляцій на дефекті) він набуває і нелінійних властивостей. Ми враховуємо нелінійність Керра лише в хвилеводах (припускаючи, що ширина хвилеводів набагато менша, ніж відстань між ними), і описуємо хвилеводи за допомогою нелінійних і лінійних членів. Середовище між хвилеводами вважається оптично лінійним.

Як витікає з попереднього, дане дослідження може бути корисним, для широкого кола фізичних явищ, таких, наприклад, як опис відповідних систем в нелінійній оптиці, теорії солітонів або теорії конденсату Бозе-Ейнштейна, а також в технологічних застосуваннях, наприклад, у фотоніці та спінтроніці.

РОЗДІЛ 1. Моделі солітоно-дефектних взаємодій, які описуються нелінійним рівнянням Шредінгера

1.1. Загальний огляд проблеми

У роботі [16] досліджено вплив резонансного нелінійного поширення світла через оптичні хвилеводи з профілем показника заломлення, який періодично змінюється та локалізованими дефектами. Запропоновано підхід до проектування просторових дефектів у періодичній структурі з метою захоплення та локалізації світлових імпульсів. Ця методика передбачає резонансне перенесення енергії з біжучих хвиль (щілинні солітони) в нелінійні форми стоячої хвилі, які локалізовані при дефекті. Просту модель, що демонструє подібні явища забезпечує кубічне нелінійне рівняння Шредінгера з локалізованими потенціалами. Зокрема, при чисельному моделюванні солітонів, які локалізовані на дефекті в одновимірному випадку, отримано різні варіанти їх поведінки в залежності від параметрів, що описують солітон.

Існує декілька досліджень, які вивчали поширення нелінійних хвиль через змінні середовища. Підхід, прийнятий в роботах [17,18] полягає в тому, щоб розглядати таке середовище як послідовність окремих слабких розсіювачів, кожен з яких моделюється як відштовхуючий потенціальний бар'єр у вигляді дельта-функції. Взаємодію солітона з кожним розсіювачем сформульовано як відображення внутрішніх параметрів солітону; солітон, який слабо взаємодіє з розсіювачем, регулює свої внутрішні параметри внаслідок радіаційної втрати енергії. Взаємодія з цілим середовищем апроксимується повторюваним об'єднанням цих простих відображень.

Проблема, до якої звертаються автори [19], відрізняється у багатьох відношеннях. Розглядаються сильні взаємодії солітону з одним розсіювачем (дефектним потенціалом). Цей потенціал є притягуючою потенціальною ямою у вигляді δ -функції, що має єдиний локалізований власний стан (дефектна мода). Отже, можна очікувати, що солітон розпадеться на солітон зі зміненими параметрами внаслідок вихідного випромінювання та передачі енергії

локалізований дефектній моді. Частина енергії солітону може відбиватися потенціалом, проходячи крізь нього, або локалізуватися на дефекті. Такі нелінійні взаємодії розсіювання виявляють велику складність, тому досліджуються спочатку шляхом прямого чисельного моделювання, а потім через скінченновимірні моделі.

Зокрема [19], було проведемо серію чисельних експериментів з рівняннями в частинних похідних (ДРЧП), в яких спостерігаються різноманітні явища, які можна частково пояснити резонансною передачею енергії стоячим хвилям, локалізованим на дефекті. Надалі, отримано скінченновимірну систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), що моделюють взаємодію солітонів з нелінійними дефектними модами стоячої хвилі, підтримуваними потенціалом. Ця частина аналізу схожа на дослідження скінченновимірного випадку кінків, що взаємодіють з притягуючим точковим дефектом у рівнянні синус-Гордона[20]. Вивчення взаємодій солітонів з дефектом на основі нелінійного рівняння Шредінгера, детальне порівняння розв'язків ДРЧП і ЗДР висвітлене в цій роботі має загальні наслідки для подібних "колективних координат" скінченновимірних моделей, які широко використовуються для вивчення динамічних взаємодій суцільних полів.

1.2. Нелінійне рівняння Шредінгера з точковим дефектом

Розглянемо нелінійне рівняння Шредінгера з просторово локалізованим "притягуючим" домішкою (потенціальною ямою дефекту):

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + \gamma\delta(x)u = 0, \quad \gamma > 0. \quad (1.2.1)$$

У відсутності дефекту ($\gamma = 0$) ця система підтримує двопараметричну сім'ю солітонів:

$$u_{sol}(x, t) = \eta \operatorname{sech}(\eta(x - vt)) e^{i(vx - \omega t)}, \quad (1.2.2)$$

де $\omega = -(1/2)(\eta^2 - v^2)$ – частота.

Солітони – це нелінійні зв’язані стани, які відіграють фундаментальну роль у незбуреному ($\gamma = 0$) нелінійному рівнянні Шредінгера. Окремий інтерес викликає їх поведінка у збуреній системі. При $\gamma > 0$, вираз (1.2.2) не є розв’язком рівняння (1.2.1), але далеко від дефекту, солітон поширюється практично без змін зі сталою швидкістю v за рахунок експоненціально малого перекриття солітону та потенціалу.

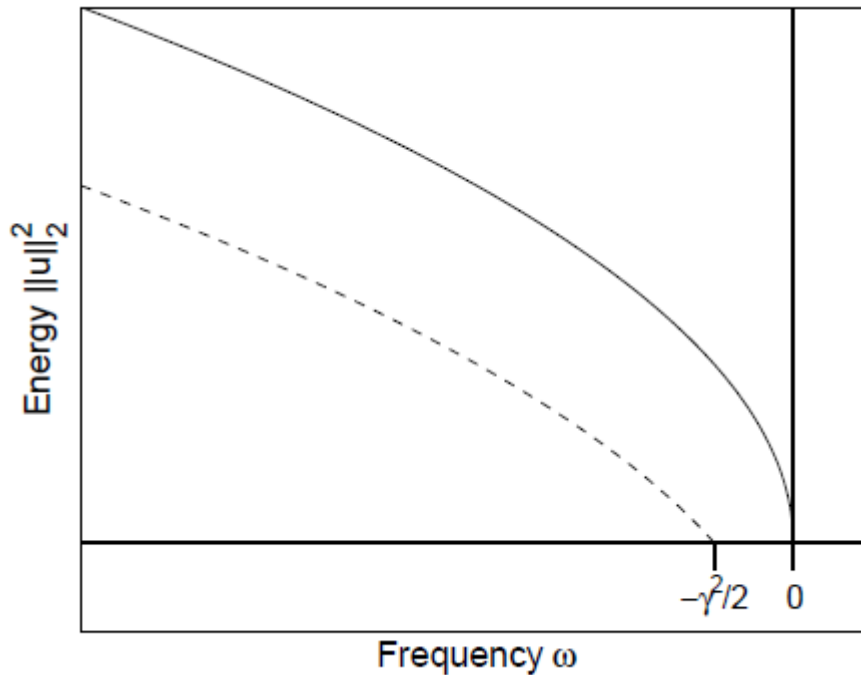


Рис.1.2.1. Частота та амплітуда солітону за відсутності дефекту (суцільна лінія) та дефектного моду (пунктирна).

Рівняння (1.2.1) має також точний розв’язок у вигляді нелінійного зв’язаного стану (або дефектної моди):

$$u_{def}(x, t) = a e^{ia^2 t/2} \operatorname{sech}\left(a|x| + \tanh^{-1} \frac{\gamma}{a}\right), \quad (1.2.3)$$

Ці розв’язки побудовані зі стаціонарних ($v = 0$) солітонів з кожної сторони дефекту, зшитих разом в точці $x = 0$, для виконання умов неперервності в точці $x = 0$ і відповідної умови стрибка першої похідної в тій самій точці $u(0+) - u(0-) = -2\gamma u(0)$. Для обох зв’язаних сімей станів u_{sol} і u_{def} частота коливань залежить нелінійно від амплітуди.

Головна мета – дослідження сильних взаємодій між солітонами та δ -подібним дефектом. Якщо потужність дефекту γ мала або швидкість солітону велика, то взаємодія слабка: витрачається невелика кількість енергії на випромінювання і при цьому солітон продовжує рухатись із незначними змінами параметрів, які його характеризують. У випадку слабких взаємодій оцінки енергетичної втрати солітону можна отримати за допомогою теорії збурень першого порядку (апроксимація Борна) [17,4]. Коли сила дефекту є достатньо великою, а швидкість солітону достатньо мала, вони можуть досить сильно взаємодіяти. Характер цієї взаємодії може бути зрозумілий через нелінійний резонанс, який в деяких випадках відбувається між солітоном і дефектною модою.

Солітони з $v = 0$ мають $\|u_{sol}\|_{L^2}^2 = -\eta^2$ і частоту $-\eta^2/2$, тоді як нелінійні дефектні моди мають $\|u_{def}\|_{L^2}^2 = 2(a - \gamma)$ і частоту $-a^2/2$. На рис.1.2.1. зображена норма квадрата L^2 цих двох типів мод як функції від частоти. Через зв'язок між квадратом норми L^2 з електромагнітною енергією в контексті оптики називатимемо $\|u_{sol}\|_{L^2}^2$ і $\|u_{def}\|_{L^2}^2$ енергією солітонів і дефектних мод. Більш загально квадрат норми L^2 функції u в даній області простору є енергією, що міститься в цій області.

Звернемо увагу, що в діапазоні частот $\omega \in (-\gamma^2/2, 0)$ не існує жодних дефектних мод. Це твердження має вирішальне значення для прогнозування того, які солітони будуть захоплені та відбиті потенціалом. Вважається, що достатньо повільні солітони з $\eta > \gamma$ потрапляють у потенціальну (дефектну) яму, в той час як достатньо швидкі солітони з $\eta < \gamma$ відбиваються дефектом. Це означає, що захоплення солітону відбувається через передачу резонансної енергії від солітона до дефектної моди. Якщо вхідний солітон має частоту менше $-\gamma^2/2$, він може збурити моду нелінійного дефекту та передати енергію в цю моду. З'ясовано, що дефект поводить себе як розсіювач, розщеплюючи вхідну хвилю на передані, захоплені та відбиті частини [21]. Ця поведінка різко відрізняється від того, що спостерігається в нелінійній оптиці: у рівняннях з нелійними зв'язаними модами, які описують взаємодію щільних солітонів з нелійними дефектними

модами, було встановлено [16], що за відсутності резонансу когерентні імпульси, відбиті або передані після взаємодії з дефектом, втрачали невелику кількість енергії, яка була захоплена дефектом або витрачена на випромінювання.

1.3. Властивості НРШ та його розв'язків

1.3.1. Структурні властивості НРШ

Нелінійне рівняння Шредінгера (1.2.1) – гамільтонова система, яку можна записати у вигляді:

$$iu_t = \frac{\delta}{\delta u^*} \mathcal{H}[u, u^*], \quad (1.3.1.1)$$

де $\mathcal{H}[u, u^*]$ – гамільтоніан:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u, u^*] &= \int \left(\frac{1}{2} |u_x|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 - \gamma \delta(x) |u|^2 \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} |u_x|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 \right) dx - \gamma |u(0)|^2. \end{aligned} \quad (1.3.1.2)$$

Інваріантність відносно часу означає, що $\mathcal{H}[u, u^*]$ зберігається потоком. Крім того, з інваріантності при перетворенні $u \rightarrow e^{i\xi} u$, $\xi \in R^1$ випливає, що

$$\mathcal{N}[u, u^*] = \int |u|^2 dx = \|u\|_{L^2}^2 \quad (1.3.1.3)$$

є інтегралом руху.

Для просторового інваріантного випадку при $\gamma = 0$ НРШ інваріантне відносно перетворень Галілея:

$$u(x, t) \rightarrow u(x - vt, t) e^{i(xv - (1/2)v^2 t)}, \quad v \in R^1. \quad (1.3.1.4)$$

1.3.2. Нелінійні зв'язані стани

Зв'язані стани є важливим класом розв'язків, що мають форму:

$$u_b(x, t) = e^{-i\lambda t} \varphi(x; \lambda), \quad \varphi \in L_2 \quad (1.3.2.1)$$

Для лінійного рівняння Шредінгера функції φ є власними станами оператора Шредінгера $-\frac{1}{2}\partial_x^2 - \gamma\delta(x)$ і задовольняють рівняння:

$$-\frac{1}{2}\varphi_{xx} - \gamma\delta(x)\varphi = \lambda\varphi \quad (1.3.2.2)$$

Відомо, що зв'язані стани відіграють фундаментальну роль у загальній динаміці лінійного рівняння Шредінгера. Це є наслідком спектрального розвинення лінійних самоспряжених операторів.

Для НРШ такі зв'язані стани задовольняють рівняння:

$$-\frac{1}{2}\varphi_{xx} - (\gamma\delta(x) + |\varphi|^2)\varphi = \lambda\varphi \quad (1.3.2.3)$$

і мають загальний характер "нелінійних власних станів", хоча в таких станах не існує точної теорії розкладу розв'язків, за винятком повністю інтегровного випадку $\gamma = 0$ [2]. Для цього трансляційно-інваріантного випадку є сім'я уособлених хвильових розв'язків (1.2.2). Це галілеєві перетворення основної стоячої хвилі (1.2.2) при $v = 0$; див. (1.3.1.4). Для $\gamma > 0$ рівняння перестає бути інваріантним, і з'являються дефектні або "зв'язані" стани (1.2.3). Ці дві сім'ї нелінійних зв'язаних станів накладаються на біфуркаційну діаграму на рис.1.2.1.

Зазначимо, що при $\gamma = 0$ сім'я солітонів роздвоюються, починаючи з нульового стану на нульовій частоті до кінцевої точки неперервного спектру лінеаризованого оператора $-\partial_x^2$ вище нульового стану. При $\gamma > 0$ сім'я дефектних станів роздвоюється з нульового стану в напрямку власної функції лінеаризованого оператора, $-\partial_x^2 - \gamma\delta(x)$ до відповідної власної частоти $\lambda = -\gamma^2 / 2$ (див. [25]).

1.4. Пряме чисельне моделювання ДРПЧ

У цьому розділі ми обговорюємо симуляцію початкової задачі для НРШ (1.2.1). Всі чисельні експерименти в цьому розділі були виконані, використовуючи модифікацію метода кінцевих різниць Фая та ін. [32], що зберігає дискретну норму L^2 і, за відсутності дефекту, дискретний аналог

гамільтоніана. Метод другого порядку точності як у просторі, так і в часі. Тому він вимагає розв'язання системи лінійних рівнянь на кожному кроці. Дельта-функція Дірака наближається розривом в одній точці, або гладкою функцією, що «схожа» на дельта-функцію, з аналогічними результатами в обох випадках.

У чисельних експериментах солітон в нульовий момент часу знаходиться далеко від дефекту з заданою швидкістю v і амплітудою η і починає рухатися в напрямку дефекту. В залежності від параметрів спостерігаються різні варіанти поведінки солітону. Для простоти ми обмежуємо наше дослідження дефектами з силою $\gamma = 1$. Отже, гілка нелінійних дефектних модів роздвоюється на частоті $-1/2$. Нелінійний резонанс, наведений на рисунку 2.1, є корисним для розуміння різних варіантів поведінки, які можливі в цій взаємодії. На рисунках, які будуть наведені далі, приведена залежність $|u|$ від координати та часу, хоча збереження системою L^2 може допускати і побудову $|u|^2$. Це зроблено для того, щоб було видно випромінювання під час взаємодії солітона з дефектом.

Спочатку встановлюється $\eta = 4$, а v змінюється від 1 до 2. У цьому випадку солітон майже не змінюється, втрачаючи невелику частину енергії на випромінювання. Існує критична швидкість, після якої солітон проходить через дефект, хоча зі зменшеною швидкістю, і нижче якої солітон передає свою енергію в нелінійну дефектну моду. На рисунку 1.4.1 показані вхідні та вихідні швидкості, що вказують критичну швидкість $v_c \approx 1.78$.

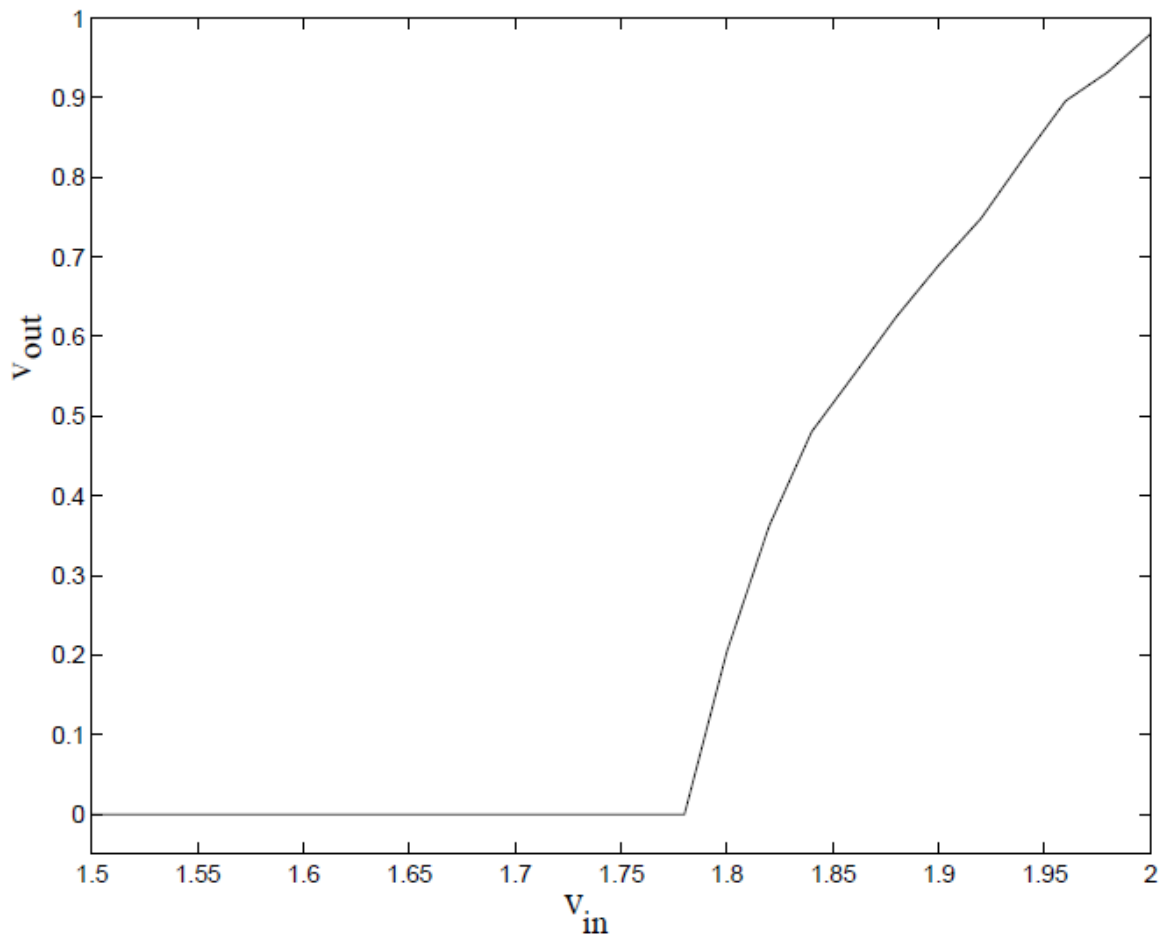


Рис.1.4.1. Залежність вхідної і вихідної швидкості солітону з амплітудою $\eta = 4$

На рис.1.4.2 показана еволюція $|u(x,t)|$ протягом деякого часу після взаємодії. На лівому рисунку початкова швидкість становила приблизно $v = 1.65$ і через деякий час розв'язок став дефектним модом, зосередженим біля $x = 0$ з невеликою кількістю випромінювання. На правому рисунку з початковою швидкістю більше, ніж v_c , солітон проходить через дефект, хоча частина початкової енергії залишилась біля дефекту і, з часом, в підсумку набуває форми малого амплітудного дефектного моду.

Коли η зменшується до 2, поведінка солітону змінюється. Симуляція показує більш складний процес нелінійного розсіювання. Імпульс розпадається на три частини: відбитий, захоплений і той, що пройшов. У всіх випадках утворюється значна дефектна мода. Чим більша початкова швидкість солітона,

тим менше мода дефекту, що залишилась в околі нульової точки, і тим більша частина енергії, яка пройшла через дефект.

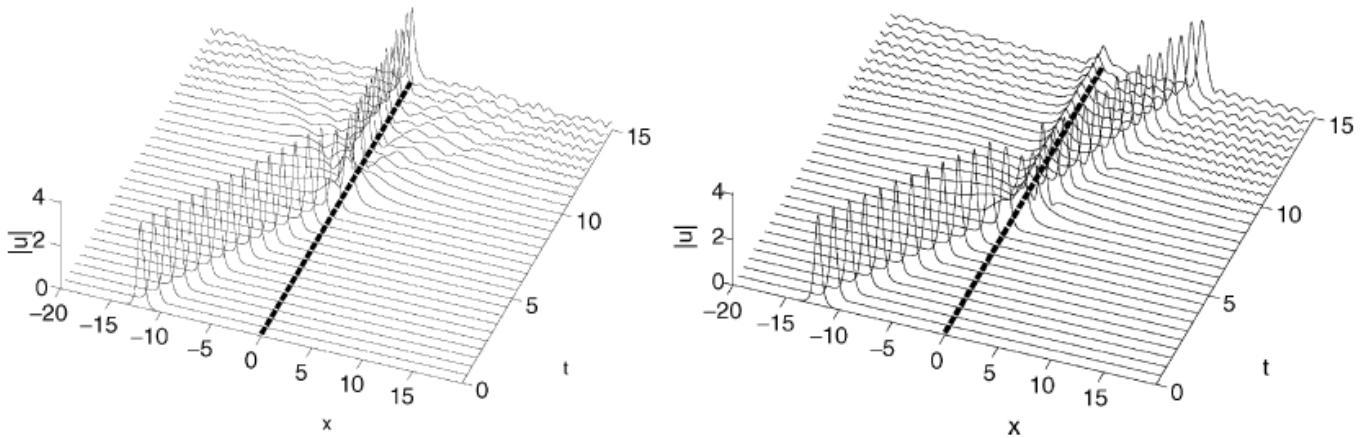


Рис.1.4.2. Амплітуда солітону $|u|$ з великою початковою амплітудою $\eta = 4$ після взаємодії з дефектом. Зліва, солітон, який потрапив у потенціальну яму. Праворуч швидкий солітон, який пройшов крізь дефект і залишив за собою невелику частину енергії в дефектній моді. Перехід від захоплення до проходження є різким і він відбувається при критичній швидкості $v_c \approx 1.78$, як це видно з рис.1.4.1.

Приклад наведено на рис.1.4.3, і це явище зображене графічно на рис.1.4.4, де показано, як частка енергії, що вноситься в дефектну моду, монотонно зменшується зі збільшенням початкової швидкості солітона.

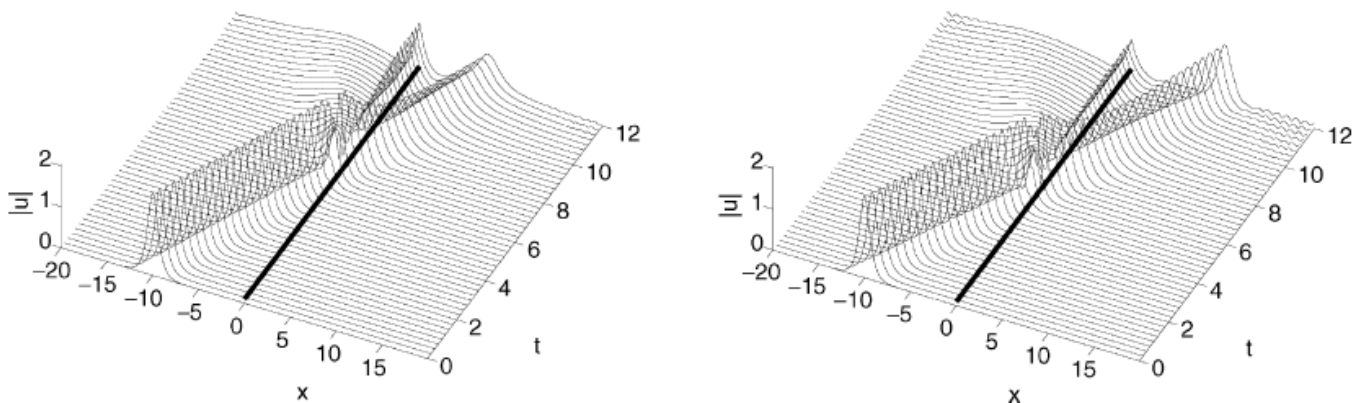


Рис.1.4.3. Солітон з початковою амплітудою $\eta = 2$ залишає велику частину енергії, в області дефекту. Зліва, більш повільний солітон з $v = 1.5$ залишив значну частину своєї

енергії біля дефекту. Праворуч, коли швидкість вхідного солітона збільшується до $v = 1.75$, енергія, що залишилася біля дефекту, менша.

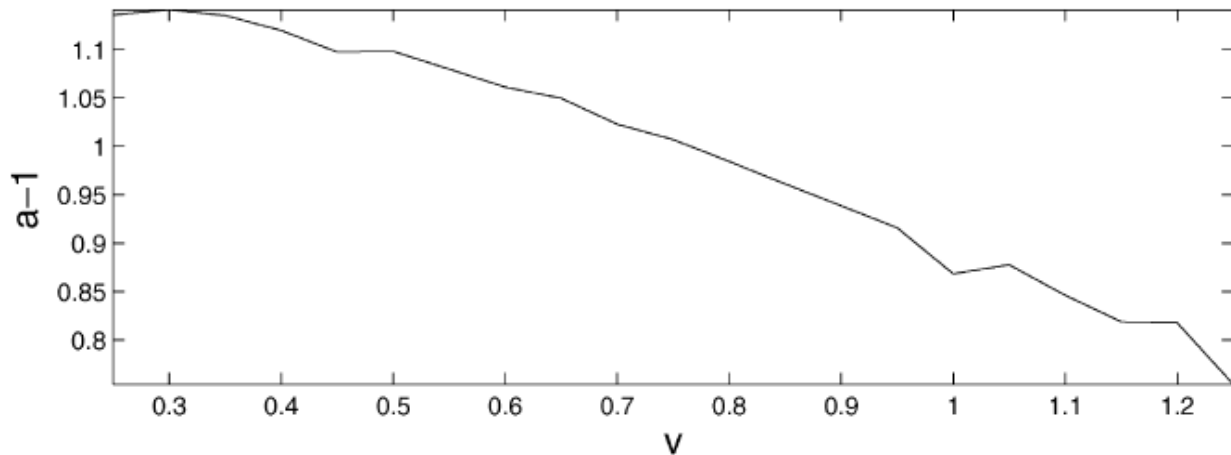


Рис.1.4.4. При $\eta = 2$, оскільки початкова швидкість збільшується, загальна кількість енергії в дефектному моді зменшується.

Коли η зменшується до 0.5 поведінка також змінюється. У цьому випадку солітон або відбивається, або проходить через дефект, залишаючи там невелику кількість енергії. Коли початкова швидкість досить мала, то солітон, як виявляється, повністю відбивається, а коли початкова швидкість є досить великою, солітон майже повністю проходить крізь дефект. Для проміжних швидкостей початковий імпульс розподіляється на передану та відбиту хвилі. Явище нелінійного розсіювання вивчалось в роботі [21], де отримані приблизні коефіцієнти відбиття та пропускання для взаємодії у випадку малих η .

1.4.1. Аналіз результатів

Проаналізуємо розсіювання солітонів на дефектах з точки зору амплітудно-частотних кривих (рис.1.2.1). У попередньому розділі, оскільки параметр амплітуди солітону η зменшувався, було продемонстровано два ефекти, при яких лише незначна частина енергії залишається на дефекту, а більшість розсіюється. Спочатку при $\eta = 2$ кількість енергії L^2 , втраченої при взаємодії, збільшується в порівнянні з експериментами з $\eta = 4$. Нарешті, при $\eta < \gamma$ вже не існує

нелінійного дефектної моди, що резонує з вхідним солітоном, і тому майже ніякої енергії не втрачається.

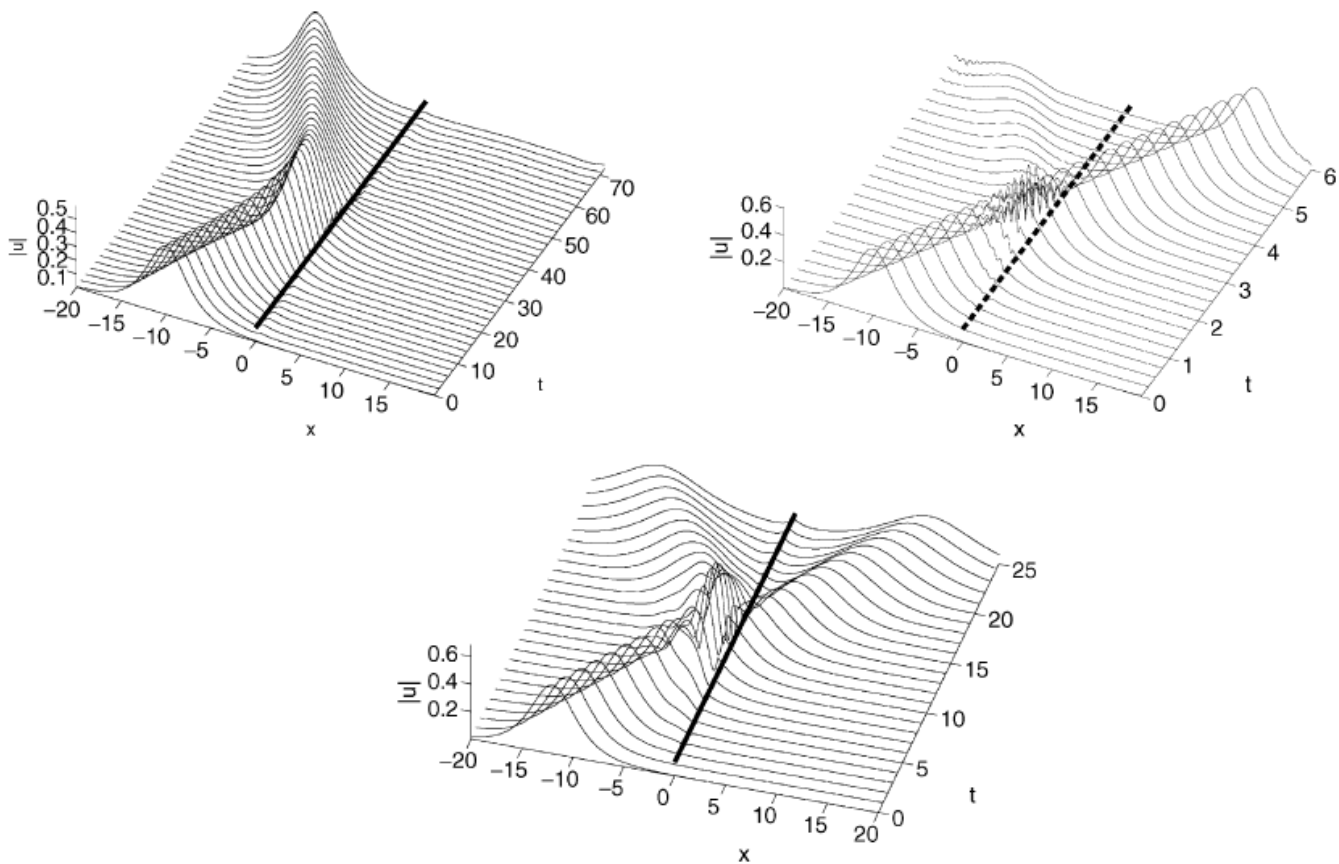


Рис.1.4.1.1. Якщо $\eta = 0.5$, більша частина хвилі відбивається з $v = 0.25$ (ліворуч) або проходить, якщо $v = 4$ (праворуч). Коли $v = 1$, хвиля ділиться на дві з майже однаковими енергіями.

У контексті нелінійних рівнянь зі зв'язаними станами в [29] стверджується, що для досить повільних солітонів повинен бути простий механізм передачі енергії резонансу. Зокрема, гарним передбаченням розподілу енергії, що залишається біля дефекту, буде вертикальне проектування точки, що відповідає солітону, у відповідну точку кривої дефектної моделі з тією ж частотою. Виявляється, це наближення працює в деяких випадках, але подальше масштабне моделювання показало, що загальна ситуація ускладнюється. Дослідимо це питання за допомогою наступного допоміжного чисельного експерименту.

Розглянемо сім'ю солітонів з нульовою швидкістю й різними амплітудами η , розташованими безпосередньо над дефектом. З плином часу були сформовані

стани у вигляді стоячих хвиль (нагадаємо, що стояча хвиля (1.2.3) є точним розв'язком рівняння (1.2.1)). Розв'язок швидко перетворюється на комбінацію нелінійної дефектної моди та випромінювання. Якщо застосувати наведену вище картину, то отримані таким чином моди дефектів повинні мати майже ті ж частоти, що й вихідні солітони. Приклад наведено на рисунку 1.4.1.2, який був ініціалізований з $\eta = 1$ і $\gamma = 1$. Очевидно, що в цьому експерименті вищевказаний "прямий" резонансний обмінний механізм не спрацьовує.

Проте цей висновок не суперечить ролі передачі резонансної енергії у захопленні вхідного солітона. У наведеному вище експерименті, в якому солітон має початкову швидкість $v = 0$, механізм відрізняється від механізму, який описує рухомий солітон. Якщо нелінійний член відсутній, результати цього допоміжного експерименту були б добре зрозумілими. Спектральна теорія вказує на те, що початковий стан розкладається на дефектний стан і випромінювання, а внутрішня частота солітону тут ролі не грає. При наявності нелінійності поведінка практично однакова, хоча ми більше не можемо обчислити результуючий стан як проекцію початкового стану на дефектний стан. Частота зміщується, оскільки розв'язок в деякому сенсі знаходить нелінійну проекцію початкового стану на сім'ю нелінійних дефектних мод (1.2.3), що має лише трохи меншу норму L^2 . У міру збільшення енергії (норма L^2) збільшується, і, як обговорювалося в кінці розділу 3, мода дефектів основного стану наближається до масштабованого солітона, центрованого при $x = 0$.

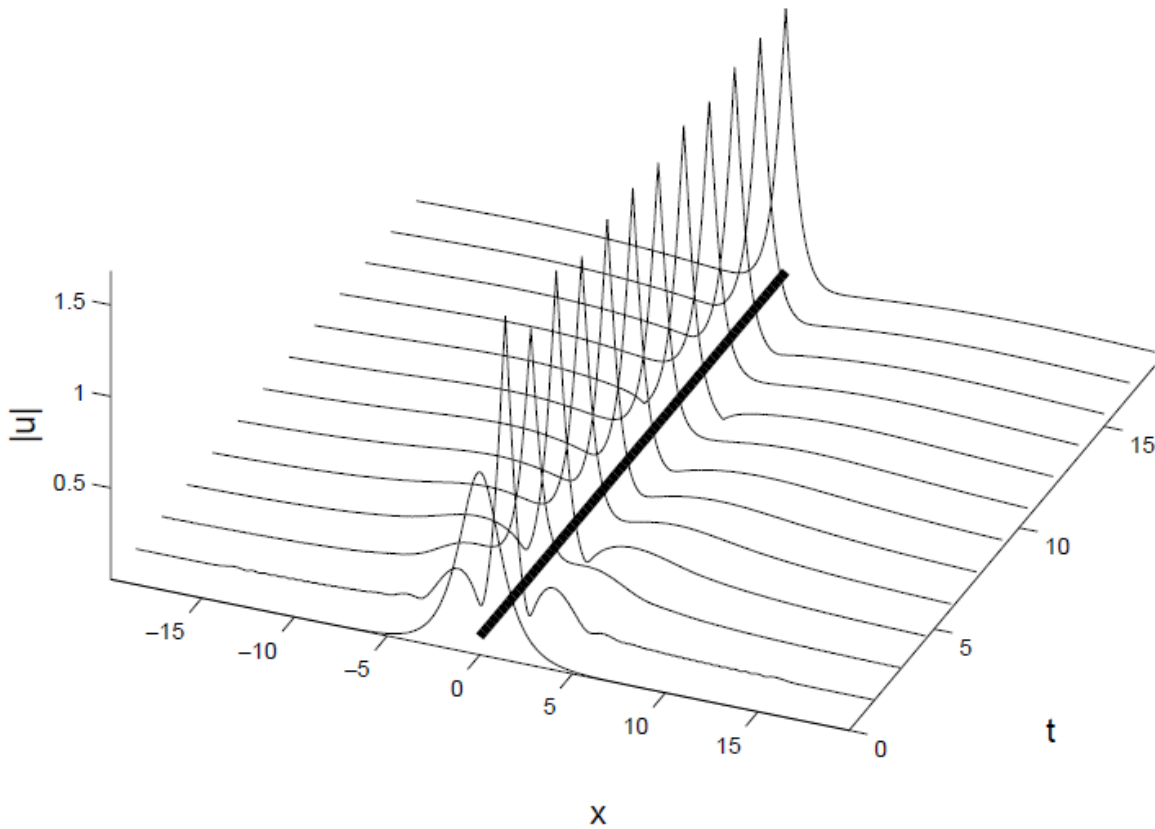


Рис.1.4.1.2. Солітон ініціалізований на дефекті, який з часом переходить у дефектну моду із випромінюванням.

На відміну від випадку солітона з нульовою швидкістю, в чисельному моделюванні рухомих солітонів дефектна мода руйнується хвостом на передньому краю солітона, для якого внутрішня частота солітона важлива. Мода дефекту може зростати, резонансно витягуючи енергію з хвоста, перш ніж більша частина солітону навіть досягне дефекту. Отже, коли солітон досягає дефекту, мода дефекту є достатньо сильною, щоб обидві моди могли взаємодіяти, і енергія може перетікати від однієї моди до іншої.

РОЗДІЛ 2. Нелінійні хвилі в модульованих оптичних середовищах.

Виведення основних рівнянь

Розглянемо приклади фізично важливих нелінійних оптичних систем, які мають періодичну або шарувату структуру. Особливу увагу приділимо системам, в яких відстань між дефектами або дефектними шарами значно перевершує їхній власний розмір.

При вивченні поширення електромагнітних хвиль в модульованих нелінійних оптичних середовищах можливі дві постановки задач з різною геометрією. По-перше, як лінії затримки зараз широко використовуються оптичні волокна з періодично змінюваним перерізом. У цьому випадку ми маємо одновимірну систему, в якій напрям поширення електромагнітної хвилі збігається з напрямком періодичної зміни властивостей середовища. При цьому спектр лінійних хвиль стає "щілинним": в ньому виникають щілини на частотах $\omega = \frac{c}{L} 2\pi n$ (де c – швидкість світла в середовищі, L – період модуляції її параметрів) шириною порядку глибини модуляції параметрів. У нелінійному випадку в цих щілинах можливе існування специфічних локалізованих стаціонарних станів – "щілинних солітонів" [33,34].

Однак як експериментальний, так і технологічний інтерес становить інша постановка задачі, коли параметри середовища змінюються в напрямку, перпендикулярному напрямку поширення хвилі. Прикладами можуть служити: (1) багат шарові коаксіальні оптичні волокна, в яких показник заломлення є функцією радіальної координати; (2) оптичні перемикачі, що представляють собою два паралельних оптичних волокна (хоча волокна реально є циліндричними, при теоретичному розгляді вони, як правило, замінюються плоскими хвилеводами – рис. 2.1); (3) оптичні хвилеводи змінного перерізу (рис. 2.2), які інтенсивно використовуються останнім часом [6,35] для спостереження нелінійної локалізації світлових пучків.

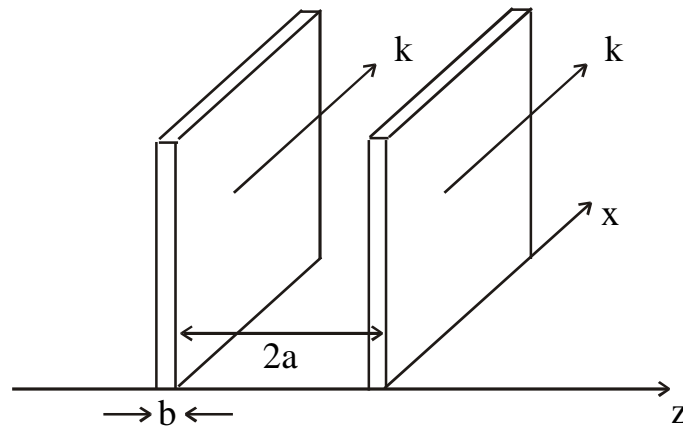


Рис. 2.1. Поширення хвилі уздовж двох плоскопаралельних хвилеводів (приклад оптичного перемикача).

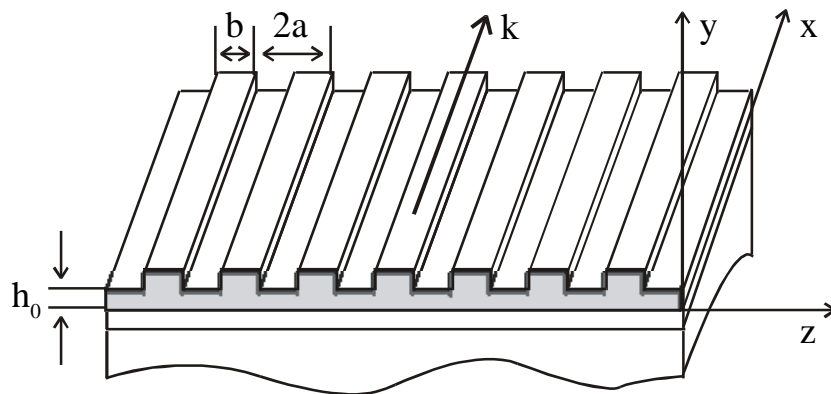


Рис. 2.2. Оптичний хвилевод змінного перерізу [6].

Розглянемо поширення нелінійної електромагнітної хвилі в шаруватому нелінійному оптичному середовищі, що містить плоскопаралельні хвилеводи, тобто виділені шари, які характеризуються показником заломлення, який відрізняється від оптичного середовища між ними (припускаємо, що шари розташовані перпендикулярно осі z). У випадку плоскополяризованої хвилі, що розповсюджується в немагнітному середовищі ($\mu = 1$) вздовж шарів (в напрямку осі x), що не залежить від координати y і має вектор електричного поля \vec{E} , спрямований уздовж осі y $\left(\vec{E} \parallel \vec{i}_y \right)$, рівняння Максвелла має вигляд

$$n^2\left(z, \vec{E}\right) \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \cdot \Delta \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

де показник заломлення n залежить від координати z і напруженості поля:

$$n = n_0 + n_1(z) + n_2(\vec{E}), \quad n_1(z) = n_1 \quad \text{в виділених шарах і } n_1(z) = 0 \quad \text{поза ними.}$$

(Виділені шари можна вважати хвилеводами при $n_1 > 0$.) Будем вважати, що модуляція параметрів середовища та енергії в хвилі малі, тобто $n_1, n_2 \ll n_0$ і залежність $n(z)$ можна враховувати лише в лінійному показнику заломлення.

Обмежимося близькими до монохроматичної хвилі розв'язками з фіксованим хвильовим вектором $\vec{k} = \vec{i}_x k$, які зручно представити у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{i}_y \cdot \{E_1(z, t) \cdot \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z, t) \cdot \sin(kx - \omega_0 t)\}, \quad (2.2)$$

де E_i повільно змінюються зі зміною z і t ; $\omega_0 = ck/n_0$ – закон дисперсії лінійних хвиль в середовищі, що розділяє виділені шари. При цьому повільна залежність $E_i(t)$ враховує відміну істинної частоти хвилі $\omega(k)$ при даному k від $\omega_0(k)$ за рахунок нелінійних ефектів і модуляції параметрів середовища.

Введемо комплексну функцію $E = E_1 + i \cdot E_2$, в термінах якої нелінійна добавка до показника заломлення набуває вигляду [36]: $n_2(E) = \sigma \cdot \alpha(\omega) \cdot |E|^2$, де $\sigma = \pm 1$ для фокусуєчого і дефокусуєчого середовищ відповідно і $\alpha(\omega)$ – нелінійна діелектрична проникність. Підставляючи вираз (2.2) у початкове рівняння (2.1) і залишаючи лише перші похідні від функції E по повільному часу, зведемо його до виду

$$2in_0^2\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2n_0 n_1(z) \omega_0^2 E + 2n_0 \alpha \omega_0^2 \sigma |E|^2 E = 0, \quad (2.3)$$

де ми замінили в першому доданку n^2 на n_0^2 , враховуючи нерівності $n_1, n_2 \ll n_0$, $\partial E / \partial t \ll \omega_0 E$. Якщо ширина виділених шарів (світловодів) b багато менше

відстані між ними $2a$ (див. рис. 2.1), то, вимірюючи час в одиницях $\frac{2n_0}{\alpha} \frac{1}{\omega_0}$,

тобто вводячи $\tau = \frac{\alpha k}{2n_0^2} t$, а координату z – в одиницях $\sqrt{\frac{n_0}{\alpha}} \frac{1}{k}$, тобто вводячи нову

координату $\xi = \sqrt{\frac{\alpha}{n_0}} k z$, рівняння (2.3) можна звести до неоднорідного нелінійного рівняння Шредінгера

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\sigma \cdot |E|^2 E = - \sum_n \lambda \cdot \delta(\xi - 2\tilde{a}n) \cdot E \quad (2.4)$$

$$\text{з } \lambda = 2b \frac{n_1}{\sqrt{\alpha n_0}} k \quad \text{і} \quad \tilde{a} = a \sqrt{\frac{\alpha}{n_0}} k.$$

У реальних оптичних експериментах, як зазначалося вище, постановка задачі може бути дещо іншою [6,35] нелінійна електромагнітна хвиля поширюється в плоскому світловоді (оптичному хвилеводі) змінного перерізу (рис. 2.2). Нелінійне оптичне середовище з показником $n = n_0 + n_2(\vec{E})$ займає область $0 < y < h(z) = h_0 + \Delta(z)$, де $\Delta > 0$, і плоскополяризована хвиля поширюється вздовж осі x . Якщо світловод обмежений оптично непрозорим середовищем, то розв'язки, близькі до монохроматичної хвилі, при слабкій модуляції товщини шару наближено можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{E} = \vec{i}_y \cdot \{E_1(z, t) \cdot \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z, t) \cdot \sin(kx - \omega_0 t)\} \cdot \sin \frac{\pi y}{h(z)}, \quad (2.5)$$

де зручно вибрати

$$\omega_0 = \omega_0(k) \approx \frac{c}{n_0} \sqrt{\left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 + k^2}.$$

При цьому, після інтегрування рівняння (2.1) по товщині світловода, рівняння (2.3) для величини $E = E_1 + iE_2$, яка повільно змінюється з часом, модифікується в такий спосіб:

$$2in_0^2\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{c^2[h^2(z) - h_0^2]}{h^2(z)h_0^2} E + \frac{4}{3}n_0\alpha\omega_0^2\sigma|E|^2 E = 0. \quad (2.6)$$

Якщо вимірювати час в одиницях $\frac{3n_0}{\alpha} \frac{1}{\omega_0} \left(\tau = \frac{\alpha\omega_0}{3n_0} t \right)$, координату – в одиницях

$\sqrt{\frac{3n_0}{2\alpha}} \frac{1}{k} \left(\xi = \sqrt{\frac{2\alpha n_0}{3}} \frac{\omega_0}{c} z \right)$, то рівняння (2.6) знову зводиться до неоднорідного

нелінійного рівняння Шредінгера

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\sigma \cdot |E|^2 E = -\lambda(\xi) \cdot E, \quad (2.7)$$

де при слабкій модуляції функції $h(z)$ ($\Delta_{\max} \ll h_0$) маємо

$$\lambda(\xi) = \frac{3c^2}{\alpha\omega_0^2(k)h_0^3} \Delta \left(\frac{c}{\omega_0} \sqrt{\frac{3}{2\alpha n_0}} \xi \right). \quad (2.8)$$

Таким чином, більш широкі області оптично прозорої пластини грають роль нових ефективних хвильоводів в розглянутій двовимірній нелінійній оптичній системі, але замінювати функцію $\lambda(z)$ системою δ - функцій можна лише при великій відстані між цими потовщеними ділянками.

Досі ми розглядали системи, в яких все середовище було нелінійним, а різні шари відрізнялися "лінійними" характеристиками, тобто коефіцієнтами в лінійних по полю доданків відповідних динамічних рівнянь. Однак, ситуація може бути і протилежною. У разі обговорюваних вище оптичних перемикачів хвильоводи

знаходяться в вакуумі, і середовище між ними є оптично лінійним. При цьому відмінність n_0 від одиниці і нелінійні ефекти треба враховувати тільки в самих хвильоводах, де $\alpha \neq 0$. В цьому випадку $\omega_0 = ck$, і з рівняння (2.3) з $\alpha = \alpha(z)$ для тонких хвильоводів товщиною b , розташованих в площинах $z = z_i$, слідує такий варіант рівняння Шредінгера:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\lambda \sum_i \delta(z - z_i) E - 2\sigma \sum_i \delta(z - z_i) |E|^2 E, \quad (2.9)$$

де $\lambda = \sqrt{2} n_1 k b$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha k b$ і $n_1 = n - 1$.

Наведене рівняння вперше розглядалося, наприклад, в роботах [37,38] але для вирішення іншої проблеми: поширення нелокалізованої хвилі через шарувату систему в напрямку її періодичності.

Якщо обмежитися тільки нелінійними ефектами, то для якісного вивчення проблеми в основному наближенні можна знехтувати лінійним доданком з δ -функціями в рівнянні (2.9) – так вчинили автори робіт [39,8,9].

Нарешті, звернемо увагу на таку обставину. При виведенні рівняння (2.7) ми фіксували значення хвильового вектора і отримували рівняння для поля, що залежить від координати і часу. Зручність такого підходу полягає в тому, що отримані рівняння описують динаміку одновимірної системи з точковими дефектами. У лінійній границі це добре відома і всебічно вивчена проблема квантової механіки. Навіть при більш складному (не точковому) характеру залежності параметрів від координати ми маємо в лінійній границі рівняння Шредінгера з потенційними ямами різного профілю, яке також багаторазово обговорювалося. В оптичних експериментах зазвичай фіксується частота хвилі і вивчається еволюція хвильового пучка з відстанню від джерела. При цьому отримані вище рівняння трішки модифікуються, і їхня диференціальна частина містить оператор $\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

Таким чином, в даному розділі сформульовані моделі нелінійних оптичних середовищ, що мають періодичну внутрішню структуру по одній з просторових координат. Показано, що якщо така модульована оптична система має вигляд періодичної послідовності плоскопаралельних дефектів, поперечний розмір яких істотно менше відстані між дефектними шарами, то для стаціонарних нелінійних хвиль, що поширюються уздовж шаруватої структури, можна вивести нелінійне рівняння Шредінгера зі змінними коефіцієнтами, що представляють собою послідовність δ -функцій.

РОЗДІЛ 3. Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі

3.1. Модель з лінійним дефектом

При описі локалізації нелінійних хвиль у періодичній системі, що містить велику кількість ідентичних нелінійних оптичних хвилеводів (паралельні плоскі дефектні шари), функція Лагранжа для повільного поля $E(z, t)$ (вісь z визначає напрямок, перпендикулярний до площин паралельних хвилеводів) можна записати таким чином:

$$L = \frac{i}{2} \left(E^* \frac{\partial E}{\partial t} - E \frac{\partial E^*}{\partial t} \right) - \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right|^2 + \sigma \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2na) \cdot |E|^4 + \alpha \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2na) \cdot |E|^2. \quad (3.1.1)$$

Тут параметр $\sigma = \pm 1$ характеризує взаємодію елементарних збуджень всередині хвилеводів ($\sigma = +1$ відповідає їх взаємному притягання і $\sigma = -1$ – їх взаємному відштовхуванню), i є характеристикою дефектних шарів (їх "потужність"), і $2a$ – відстань між хвилеводами.

Рівняння руху для цієї системи має такий вигляд:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2\sigma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2na) \cdot |E|^2 E = -\alpha \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2na) \cdot E \quad (3.1.2)$$

Для одного хвилеводу рівняння (3.1.2) спрощується:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2\sigma \cdot \delta(z) \cdot |E|^2 E = -\alpha \cdot \delta(z) \cdot E \quad (3.1.3)$$

Розглянемо спочатку більш простий випадок з одним хвилеводом, коли він описується лише лінійним членом. Тоді рівняння (3.1.3) набуває вигляду:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\alpha \cdot \delta(z) \cdot E \quad (3.1.4)$$

з наступним розв'язком для стаціонарного локалізованого пучка:

$$E = E_0 \cdot \exp \{ -\varepsilon |z| - i\omega t \} \quad (3.1.5)$$

де параметр $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$. Частота локальних коливань у цьому випадку дорівнює

$$\omega_l = -\frac{\alpha^2}{4} \quad (3.1.6)$$

Звернемо увагу, що параметр α може бути лише додатнім для такої системи, оскільки локалізований стан може існувати в лінійному середовищі лише для притягуючого характеру хвильоводу.

3.2. Модель з нелінійним дефектом

Якщо хвильовод описується лише нелінійним членом, то рівняння (3.1.3) має бути записано як

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\beta \cdot \delta(z) \cdot |E|^2 E \quad (3.2.1)$$

з розв'язком для стаціонарного локалізованого пучка у формі (3.1.5), де $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$ характеризує частоту збудження та амплітуду $E_0 = \sqrt{2/\beta} \cdot \sqrt{\varepsilon}$ (як і в попередньому випадку (3.1.4), параметр β також може бути лише додатнім для такої системи.) Отже, ми приходимо до залежності частоти від амплітуди поля в хвильоводі, що має такий самий вигляд, як залежність частоти ангармонічного осцилятора від амплітуди його коливань:

$$\omega = -\frac{\beta^2}{4} E_0^4$$

3.3. Модель з лінійним і нелінійним дефектами

Якщо ввести загальну "інтенсивність" оптичного потоку (загальна кількість елементарних збуджень у системі) у формі

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |E|^2 dz \quad (3.3.1)$$

і його загальна енергія

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \cdot \left\{ \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right|^2 - \frac{\beta}{2} \delta(z) |E|^4 \right\} \quad (3.3.2)$$

то, як виявляється, жоден з параметрів цієї моделі не залежить від частоти:

$$N = \frac{2}{\beta}, \quad W = 0 \quad (3.3.3)$$

Однак це властивість не є універсальною. Враховуючи нелінійність в областях за межами хвилеводу (додавши член $2|E|^2 E$ у ліву частину рівняння (3.2.1)), отримаємо

$$N = \frac{2}{\beta} \cdot \left[1 + \varepsilon \beta - \sqrt{1 + \varepsilon^2 \beta^2} \right] \quad (3.3.4)$$

Якщо розглядати лише лінійний показник заломлення у хвилеводі, коли права частина рівняння (3.2.1) дорівнює $-\beta \cdot \delta(z) \cdot E$, то для "інтенсивності" отримаємо таку залежність [7]:

$$N = 2 \cdot \left(\varepsilon - \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.3.5)$$

Тепер повернімося до дослідження рівняння (3.1.3). Проблема зводиться до розв'язання відповідного однорідного рівняння

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3.6)$$

в областях $z > 0$ і $z < 0$, яке доповнене наступними граничними умовами у місці положення хвилеводу ($z = 0$):

$$E \Big|_{z=+0} = E \Big|_{z=-0} \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=+0} - \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=-0} = - \left(2\sigma |E|^2 E + \alpha E \right) \Big|_{z=0} \quad (3.3.8)$$

Шукатимемо стаціонарні розв'язки рівняння (3.1.3) у формі

$$E(z, t) = E(z) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3.3.9)$$

де $E(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$. В результаті отримаємо вираз для розв'язку, що задовольняє граничні умови (3.3.7) - (3.3.8):

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2\varepsilon - \alpha}{2\sigma}} \cdot \exp\{-\varepsilon|z|\} \cdot \exp\{-i\omega t\} \quad (3.3.10)$$

де теж присутній параметр $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$.

Підставляючи розв'язок (3.3.10) у вираз (3.3.1) знайдемо залежність загальної кількості елементарних збуджень в локалізованому стані від частоти ω (або параметра ε):

$$N = \frac{\varepsilon - \alpha/2}{\sigma\varepsilon} = \sigma \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2\varepsilon}\right) \quad (3.3.11)$$

Відповідно, вираз для енергії набуває вигляду

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right|^2 - \sigma \delta(z) |E|^4 - \alpha \delta(z) |E|^2 \right\} \quad (3.3.12)$$

Підставляючи у цей вираз розв'язок (3.3.10), знайдемо залежність загальної енергії локалізованого стану W від частоти ω (або параметра ε):

$$W = -\sigma \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.3.13)$$

Виключаючи частоту з формул (3.3.11) та (3.3.13), отримаємо залежність:

$$W = \frac{\omega_l N}{1 - \sigma N} \quad (3.3.14)$$

де частота локальних коливань визначена в (3.1.6).

Залежності $W = W(N)$ для всіх можливих станів, локалізованих біля нелінійного хвилеводу (дефектний шар) для значення $|\alpha| = 2$ ($\omega_l = -1$), представлені на рисунку 1: $\sigma = +1$, $\alpha > 0$ (крива 1), $\sigma = +1$, $\alpha < 0$ (крива 2) і $\sigma = -1$

, $\alpha > 0$ (крива 3). Для даного значення $|\alpha| = 2$, пряма лінія $N = 1$ відіграє роль асимптоти для залежностей 1 і 2. Лінії $W = 1$ і $W = -1$ є асимптотами для кривих 2 та 3 відповідно. Таким чином, залежності 1 і 3 починаються в точці $W = N = 0$.

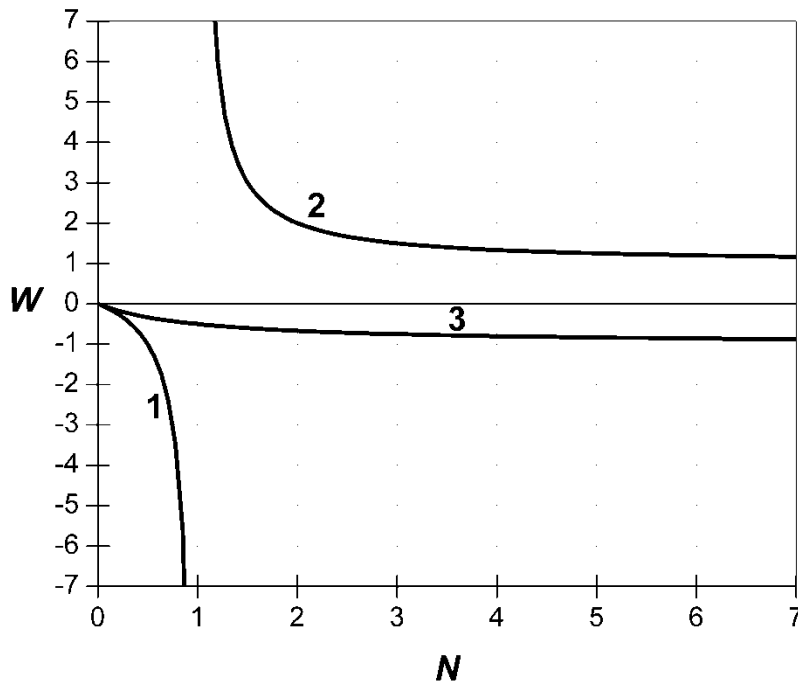


Рис.3.3.1. Залежності $W = W(N)$ для всіх можливих локалізованих станів для значень $|\alpha| = 2$ ($\omega_l = -1$): $\sigma = +1$, $\alpha > 0$ (крива 1), $\sigma = +1$, $\alpha < 0$ (крива 2) і $\sigma = -1$, $\alpha > 0$ (крива 3).

Диференціюючи вираз (3.3.14) відносно N і використовуючи (3.3.11) для $N(\varepsilon)$, ми можемо переконатися, що для розв'язку (3.3.10) існує звичайне співвідношення, яке має місце для солітонів у консервативних нелінійних системах з інтегралом руху N [40]:

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \omega \quad (3.3.15)$$

Таким чином, частота нелінійного локального коливання відіграє роль хімічного потенціалу для зв'язаних у ньому елементарних збуджень [63].

Використовуючи співвідношення (3.3.14), можна записати залежність частоти в явному вигляді:

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial N} = \frac{\omega_l}{(1 - \sigma N)^2} \quad (3.3.16)$$

Для малих значень N випливає з (3.3.16), що $\omega \approx \omega_l(1 + 2\sigma N)$. Залежності $\omega = \omega(N)$ для всіх можливих солітонних станів, локалізованих біля нелінійного хвильоводу при значення $|\alpha| = 2$ ($\omega_l = -1$), представлені на рисунку 2: $\sigma = +1, \alpha > 0$ (крива 1), $\sigma = +1, \alpha < 0$ (крива 2) і $\sigma = -1, \alpha > 0$ (крива 3). Для значення $\alpha = 2$, лінія $N = 1$ грає роль асимптоти для залежностей 1 і 2. Вісь $\omega = 0$ є асимптотою для кривих 2 та 3.

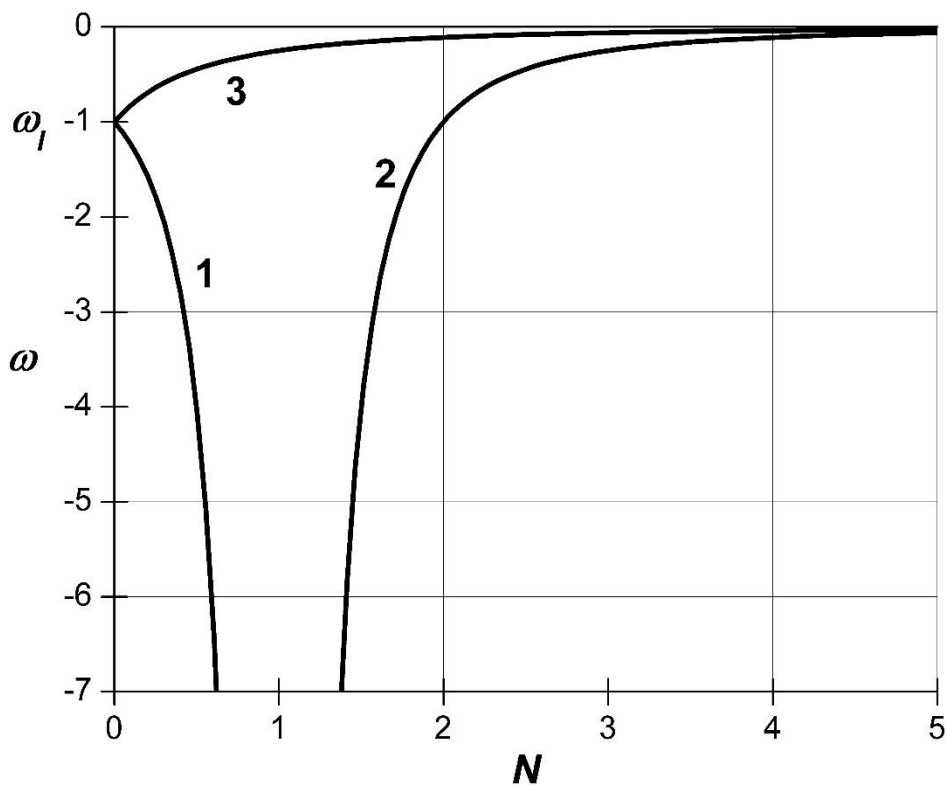


Рис.3.3.2. Залежності $\omega = \omega(N)$ для всіх можливих локалізованих станів для значень

$|\alpha| = 2$ ($\omega_l = -1$): $\sigma = +1, \alpha > 0$ (крива 1), $\sigma = +1, \alpha < 0$ (крива 2) і $\sigma = -1, \alpha > 0$ (крива 3).

Таким чином, у випадку тяжіння елементарних збуджень до хвильоводу (дефектного шару) при $\alpha > 0$ локалізовані стани можуть існувати в системі при довільному значенні параметра σ . При $\sigma = -1$ (відповідає взаємному

відштовхуванню елементарних збуджень всередині хвилеводу) локалізовані стани можливі лише у випадку притягуючого характеру хвилеводу ($\alpha > 0$).

РОЗДІЛ 4. Локалізація нелінійних стаціонарних хвиль у нелінійному оптичному хвилеводі. Чисельні розв'язки

4.1. Постановка задачі

Розглянемо нелінійне рівняння Шредінгера на відрізку $[-a, a]$ в більш загальному вигляді:

$$iE_t + bE_{xx} + N(x)|E|^2E + L(x)E = 0, \quad (4.1.1)$$

з граничними і початковими умовами:

$$E(x, 0) = E_0(x), \quad E(-a) = E_L, \quad E(a) = E_R. \quad (4.1.2)$$

Для чисельного розв'язання цієї крайової задачі скористаємося різницевиими схемами.

4.2. Різницева схема

Різницева схема – це скінчена система алгебраїчних рівнянь, поставлена у відповідність певній диференціальній задачі, що містить диференціальне рівняння і додаткові умови (наприклад крайові умови та початковий розподіл). Таким чином, різницеві схеми застосовуються для зведення диференціальної задачі, що має неперервний характер, до скінченої системи рівнянь, чисельний розв'язок яких можливий на обчислювальних машинах. Алгебраїчні рівняння, поставлені у відповідність диференціальному рівнянню отримуються при застосуванні різницевого методу, що відрізняє теорію різницевих схем від інших чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь (наприклад, проекційних методів, таких як метод Гальоркіна) [41].

Розв'язок різницевої схеми називається наближеним розв'язком диференціальної задачі. Важливими поняттями теорії різницевих схем є поняття збіжності, апроксимації, стійкості, консервативності.

Різницеві схеми поділяють на:

- 1) **Явні схеми**, які обчислюють значення сіткової функції через дані сусідніх точок. Приклад явної схеми для диференціювання: $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ (2-й порядок апроксимації). Явні схеми часто виявляються нестійкими. Згідно теореми Годунова серед лінійних різницевих схем для рівняння переносу з порядком апроксимації вище першого немає монотонних.
- 2) **Неявні схеми** використовують рівняння, які виражають дані через кілька сусідніх точок результату. Для знаходження результату розв'язується система лінійних рівнянь. Приклад неявної схеми для рівняння струни: $f(x, t+h) - 2f(x, t) + f(x, t-h) = f(x+h, t+h) - 2f(x, t+h) + f(x-h, t+h)$. Неявні схеми зазвичай є стійкими.
- 3) **Напівнеявні схеми**. На одних етапах застосовується явна схема, на інших – неявна (як правило, ці кроки чергуються). Приклад – Схема Кранка-Ніколсона, коли розв'язок береться у вигляді середнього від явної і неявної схеми розв'язку для підвищення точності.
- 4) **Компактні схеми**. Компактні схеми використовують рівняння, які зв'язують значення результату в декількох сусідніх точках зі значеннями даних в декількох сусідніх точках. Це дозволяє підвищити порядок апроксимації. Приклад компактної схеми для диференціювання: $\frac{1}{6}f'(x-h) + \frac{2}{3}f'(x) + \frac{1}{6}f'(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ (4-й порядок апроксимації).

Для рівняння (4.1.1) будемо використовувати напівнеявну схему Кранка-Ніколсона.

Нехай відомо значення $E(x, t)$ і потрібно знайти значення на наступному часовому кроці $E(x, t + \Delta t)$. Розіб'ємо відрізок $[-a, a]$ на $N - 2$ відрізків довжиною Δx , таким чином отримаємо $N - 1$ точку.

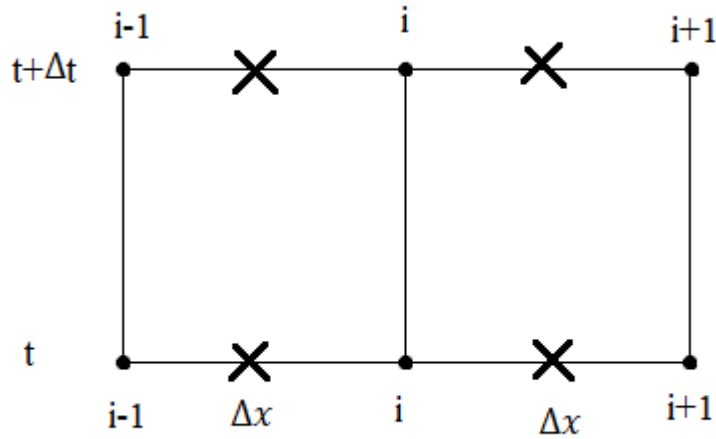


Рис.4.2.1. Різницева сітка для схеми Кранка-Ніколсона

Змістимо сітку вліво на $\Delta x/2$ і додамо ще одну точку для більш точної апроксимації граничних умов. Тепер всього є N точок.

Введемо наступні позначення: $E_i = E(x_i, t)$, $\hat{E}_i = E(x_i, t + \Delta t)$. Похідна за часом замінюється у такий спосіб:

$$E_t(x, t) = \frac{\hat{E}_i - E_i}{\Delta t}$$

Для того, щоб знайти другу похідну по координаті, потрібно знайти першу похідну. Перша похідна в схемі Кранка-Ніколсона знаходиться наступним чином:

$$E_x(x, t) = \frac{\hat{E}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{E}_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + \frac{E_{i+\frac{1}{2}} - E_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x}$$

Тоді друга похідна:

$$E_{xx}(x, t) = \frac{\hat{E}_{i+1} - 2\hat{E}_i + \hat{E}_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{2\Delta x}$$

Четвертий доданок у рівнянні (4.1.1):

$$L(x)E(x, t) = L_i \frac{\hat{E}_i + E_i}{2}$$

Нелінійний доданок можна лінеаризувати, якщо $|E|^2$ брати з попереднього часового кроку, у такий спосіб:

$$N(x)|E(x, t)|^2 E(x, t) = N_i |E_i|^2 \frac{\hat{E}_i + E_i}{2}$$

Рівняння (4.1.1) (для внутрішніх точок, тобто де $i = \overline{2, N-1}$) перетворюється на систему рівнянь:

$$i \frac{\hat{E}_i - E_i}{\Delta t} + b \frac{\hat{E}_{i+1} - 2\hat{E}_i + \hat{E}_{i-1}}{2\Delta x^2} + b \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{2\Delta x^2} + N_i |E_i|^2 \frac{\hat{E}_i + E_i}{2} + L_i \frac{\hat{E}_i + E_i}{2} = 0$$

Помножимо цей вираз на $i\Delta t$:

$$-\hat{E}_i + E_i + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x^2} (\hat{E}_{i+1} - 2\hat{E}_i + \hat{E}_{i-1}) + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x^2} (E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) + \frac{i\Delta t N_i}{2} |E_i|^2 (\hat{E}_i + E_i) + \frac{i\Delta t L_i}{2} (\hat{E}_i + E_i) = 0$$

перенесемо доданки без \hat{E}_{i+1} , \hat{E}_i , \hat{E}_{i-1} у праву частину:

$$-\hat{E}_i + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} (\hat{E}_{i+1} - 2\hat{E}_i + \hat{E}_{i-1}) + \frac{i\Delta t N_i}{2} |E_i|^2 \hat{E}_i + \frac{i\Delta t L_i}{2} \hat{E}_i = -E_i - \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} (E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) - \frac{i\Delta t N_i}{2} |E_i|^2 E_i - \frac{i\Delta t L_i}{2} E_i$$

і згрупуємо доданки з \hat{E}_{i+1} , \hat{E}_i , \hat{E}_{i-1} :

$$\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \hat{E}_{i+1} + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \hat{E}_{i-1} - \left(1 + 2\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} - \frac{i\Delta t N_i}{2} |E_i|^2 - \frac{i\Delta t L_i}{2}\right) \hat{E}_i = -E_i - \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} (E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) - \frac{i\Delta t N_i}{2} |E_i|^2 E_i - \frac{i\Delta t L_i}{2} E_i$$

Отримали вираз наступного вигляду:

$$a_i \hat{E}_{i+1} - b_i \hat{E}_i + c_i \hat{E}_{i-1} = -d_i \quad (4.2.1)$$

де

$$a_i = a = \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \quad (4.2.2a)$$

$$b_i = 1 + 2\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} - \frac{i\Delta t N_i}{2} |E|^2 - \frac{i\Delta t L_i}{2} \quad (4.2.2б)$$

$$c_i = c = a = \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \quad (4.2.2\text{в})$$

$$d_i = E_i + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x}(E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) + \frac{i\Delta tN_i}{2}|E|^2 E_i + \frac{i\Delta tL_i}{2}E_i \quad (4.2.2\text{г})$$

В (4.1.4г) згрупуємо доданки з E_{i+1} , E_i , E_{i-1} :

$$d_i = (1 - 2\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} + \frac{i\Delta tN_i}{2}|E|^2 + \frac{i\Delta tL_i}{2})E_i + \frac{i\Delta tb}{2\Delta x}(E_{i+1} + E_{i-1})$$

Легко помітити, що вираз у дужках при E_i дорівнює

$$1 - 2\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} + \frac{i\Delta tN_i}{2}|E|^2 + \frac{i\Delta tL_i}{2} = 2 - b_i$$

а

$$\frac{i\Delta tb}{2\Delta x} = a.$$

Тоді

$$d_i = (2 - b_i)E_i + a(E_{i+1} + E_{i-1})$$

Аналогічно, спростивши (4.1.4б), отримаємо:

$$b_i = 1 + 2a - \frac{i\Delta t}{2}(N_i|E|^2 + L_i)$$

Таким чином, маємо остаточні формули для коефіцієнтів a_i , b_i , c_i , d_i :

$$a_i = a = \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \quad (4.2.3\text{а})$$

$$b_i = 1 + 2a - \frac{i\Delta t}{2}(N_i|E|^2 + L_i) \quad (4.2.3\text{б})$$

$$c_i = c = a = \frac{i\Delta tb}{2\Delta x} \quad (4.2.3\text{в})$$

$$d_i = (2 - b_i)E_i + a(E_{i+1} + E_{i-1}) \quad (4.2.3\text{г})$$

Тепер розглянемо крайні точки, де $i = 1, N$. Внаслідок зсуву сітки на $\Delta x/2$ граничні умови будуть мати вигляд:

$$\frac{E_1 + E_2}{2} = E_L$$

$$\frac{E_{N-1} + E_N}{2} = E_R$$

Якщо привести вирази для граничних умов до вигляду (4.2.1), то матимемо:

$$E_1 + E_2 = 2E_L \quad (4.2.4a)$$

$$E_{N-1} + E_N = 2E_R \quad (4.2.4b)$$

Отже, з вищенаведених формул витікає, що

$$a_1 = 0, \quad c_N = 0$$

В результаті маємо трьохдіагональну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_{N-1} \\ E_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

4.3. Метод прогонки

Систему (4.2.5) потрібно розв'язати для того, щоб знайти значення E в наступний момент часу. Найкраще для цього підходить метод прогонки [42], оскільки матриця трьохдіагональна. Метод потребує найменше часу, оскільки для нульових елементів обчислення не проводяться.

Метод прогонки ґрунтується на припущенні, що шукані невідомі пов'язані рекурентним співвідношенням ($i = \overline{1, N-1}$):

$$\hat{E}_i = p_i \hat{E}_{i+1} + q_i \quad (4.3.1)$$

Знайдемо коефіцієнти p_i і q_i з рівнянь (4.2.1) і (4.3.1). Для цього замінімо в (4.3.1) i на $i - 1$ і підставимо в (4.2.1):

$$a_i \hat{E}_{i+1} - b_i \hat{E}_i + c_i (p_{i-1} \hat{E}_i + q_{i-1}) = -d_i \quad (4.3.2)$$

Зведемо (4.3.2) до вигляду (4.3.1):

$$\begin{aligned} -b_i \hat{E}_i + c_i (p_{i-1} \hat{E}_i + q_{i-1}) &= -d_i - a_i \hat{E}_{i+1} \\ -b_i \hat{E}_i + c_i p_{i-1} \hat{E}_i &= -d_i - c_i q_{i-1} - a_i \hat{E}_{i+1} \\ \hat{E}_i &= \frac{a_i}{b_i - c_i p_{i-1}} \hat{E}_{i+1} + \frac{d_i + c_i q_{i-1}}{b_i - c_i p_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Порівнюючи (4.3.3) і (4.3.1), отримаємо формули:

$$p_i = \frac{a_i}{b_i - c_i p_{i-1}} \quad (4.3.4a)$$

$$q_i = \frac{d_i + c_i q_{i-1}}{b_i - c_i p_{i-1}} \quad (4.3.4б)$$

Для того, щоб скористатися рекурентним співвідношенням (4.3.1), потрібно знати значення \hat{E}_N, p_i, q_i .

Як видно з формул (4.3.4а, б), щоб знайти всі коефіцієнти p_i, q_i , потрібно знайти p_1 і q_1 . Ці значення можна знайти, скориставшись лівою граничною умовою (4.2.4а) та співвідношенням (4.3.1), прирівнявши коефіцієнти при \hat{E}_1 і \hat{E}_2 :

$$\hat{E}_1 = -\hat{E}_2 + 2E_L$$

$$\hat{E}_1 = p_1 \hat{E}_2 + q_1$$

тобто

$$p_1 = -1 \quad (4.3.5a)$$

$$q_1 = 2E_L. \quad (4.3.5б)$$

Значення \hat{E}_N можна знайти з правої граничної умови (4.2.46) і співвідношення (4.3.1), виразивши з нього \hat{E}_{N-1} і підставивши це значення в (4.2.46):

$$\hat{E}_{N-1} = -\hat{E}_N + 2E_R$$

$$\hat{E}_{N-1} = p_{N-1}\hat{E}_N + q_{N-1}$$

Тоді

$$p_{N-1}\hat{E}_N + q_{N-1} = -\hat{E}_N + 2E_R$$

Отже,

$$\hat{E}_N = \frac{2E_R - q_{N-1}}{1 + p_{N-1}} \quad (4.3.56)$$

4.4. Алгоритм програми для розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера

Підсумовуючи вищесказане, можна скласти алгоритм числового розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера (4.1.1):

- 1) Задати початкову умову
- 2) Обчислити коефіцієнти a, c
- 3) Обчислити коефіцієнти b_i, d_i
- 4) Обчислити коефіцієнти p_i, q_i за відомими коефіцієнтам a, b_i, c, d_i
- 5) Обчислити значення функції \hat{E}_i за відомими коефіцієнтам p_i, q_i .
- 6) Повторювати п.2-5 достатню кількість ітерацій, після цього записати дані в файл, вивести графік на екран і знову повернутись до виконання п.2-5.

4.5. Аналіз похибок

Побудуємо аналітичні та числові розв'язки рівняння (4.1.1) і знайдемо похибку числових розв'язків.

Відомо, що при $N(x) = 1$, $L(x) = 0$ рівняння (4.1.1) має аналітичний розв'язок:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sech}\left(\frac{x - vt}{l}\right) e^{i(kx - \omega t)},$$

де $E_0^2 = \frac{b}{l^2}$, $k = v$, $\omega = \frac{v^2}{4b} - \frac{b}{l^2}$.

Покладемо $b = 1$, $l = 1$, $v = 2$ і побудуємо для цих значень графіки числових і аналітичних розв'язків.

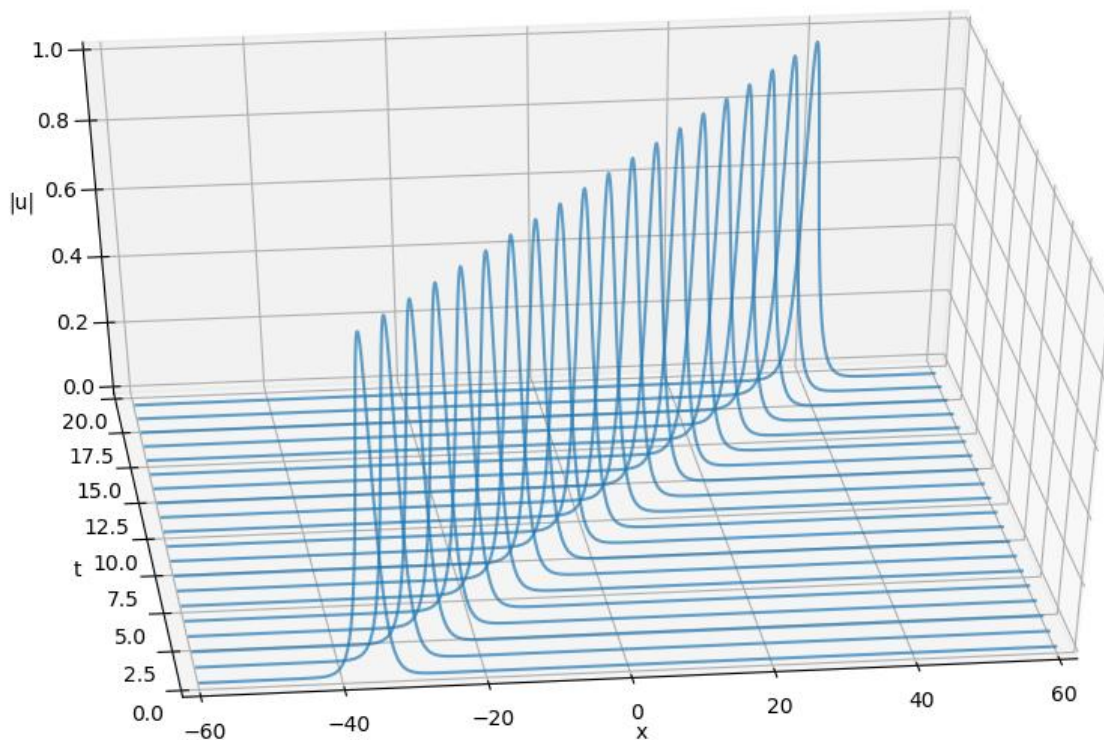


Рис.4.4.1. Аналітичний розв'язок рівняння (4.1.1) при $N(x) = 1$,

$$L(x) = 0, \quad b = 1, \quad l = 1, \quad v = 2.$$

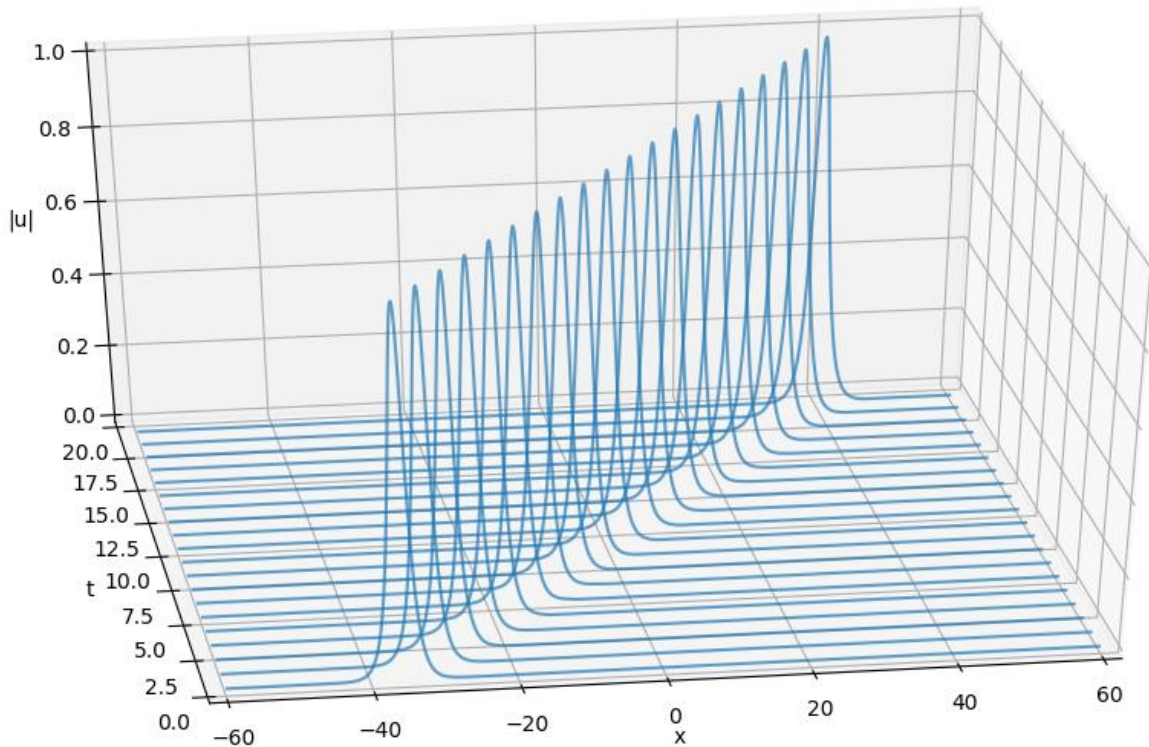


Рис.4.5.2. Числовий розв'язок рівняння (4.1.1) при $N(x) = 1$,

$$L(x) = 0, \quad b = 1, \quad l = 1, \quad v = 2.$$

Оцінимо похибки числового розв'язку. Графіки виводилися на екран з фіксованим кроком по координаті $\Delta x = 0.024$ та з часом $\Delta t = 0.5$. Таким чином, маємо дві скінченні множини значень $E(x, t)$: $E_a(i\Delta x, j\Delta t)$ і $E_q(i\Delta x, j\Delta t)$. Абсолютна похибка δ оцінювалася за наступною формулою:

$$\delta = \frac{\sum_i \sum_j |E_a(i\Delta x, j\Delta t) - E_q(i\Delta x, j\Delta t)|}{M} \quad (4.5.1)$$

де M – кількість усіх точок, зображених на графіку.

Відносна похибка:

$$\Delta = 100\delta/E_0 \quad (4.5.2)$$

Для даного випадку $\delta = 0.00238286281475$, $\Delta = 0.238 \%$.

4.6. Результати чисельних експериментів

Було проведено серію чисельних експериментів, в яких змінювалися величини $\alpha, \varepsilon, \sigma$.

Для зручності приведемо рівняння (3.1.3) до вигляду:

$$iE_t = -bE_{zz} + V(z, E)E, \quad (4.6.1)$$

де

$$V(z, E) = -(\beta|E(z, t)|^2 + \alpha)\delta(z) \quad (4.6.2)$$

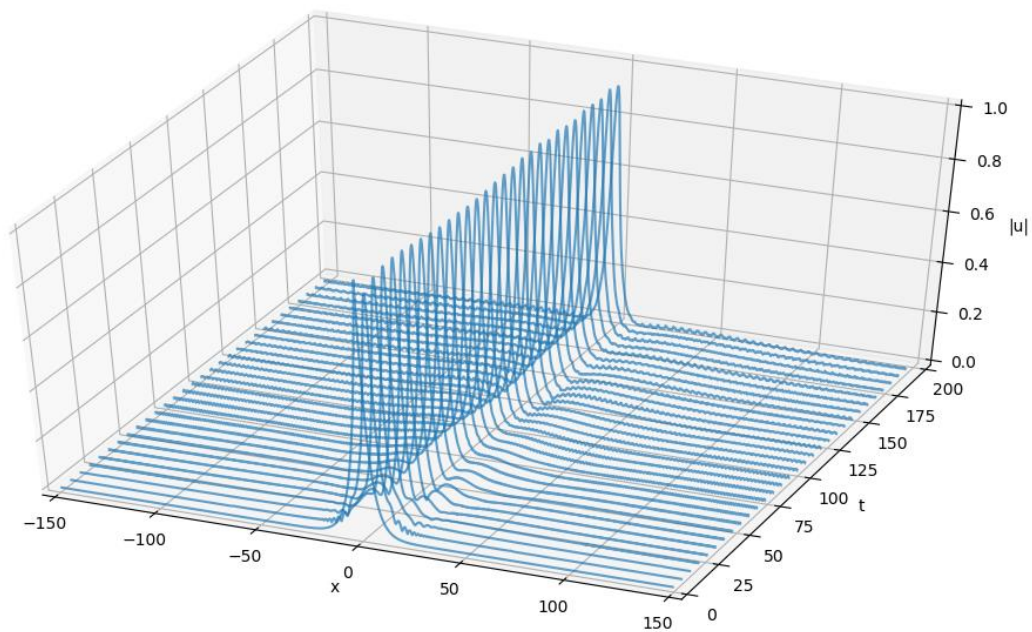


Рис.4.6.1. Профіль розв'язку рівняння при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$.

Для рівняння лише з лінійним дефектом $V(z, E) = -\alpha\delta(z)$. При $\alpha > 0$ дефект фокусуючий і пучок поширюється вздовж дефектного шару. Розв'язок є стійким.

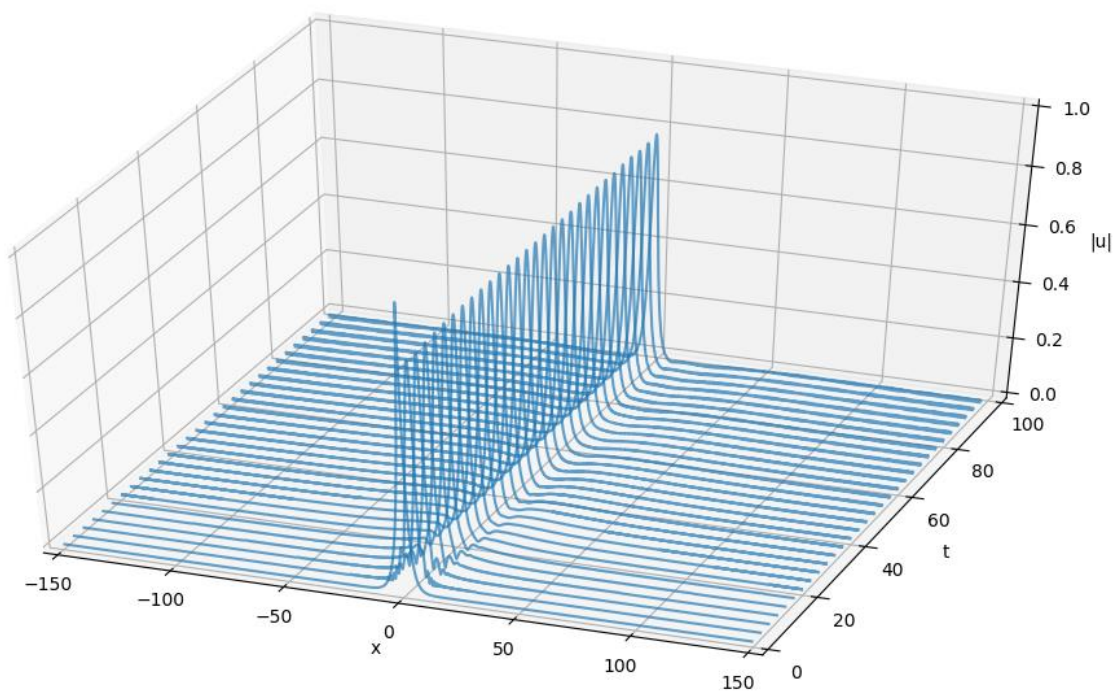


Рис.4.6.2. Профіль розв'язку рівняння при $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

У порівнянні з попереднім рисунком, в даному випадку світловий потік розсіюється менше, спостерігається незначне зменшення амплітуди зі збільшенням потужності лінійного дефекту.

Бачимо, що зі збільшенням потужності дефекту пучок все більше фокусується на ньому і при цьому розсіюється менше енергії.

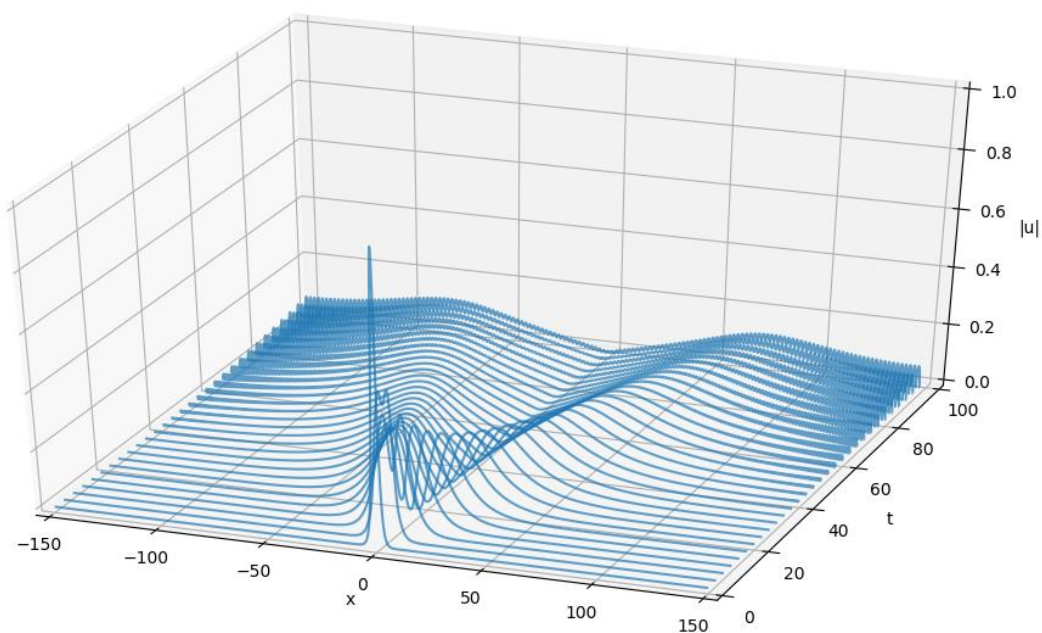
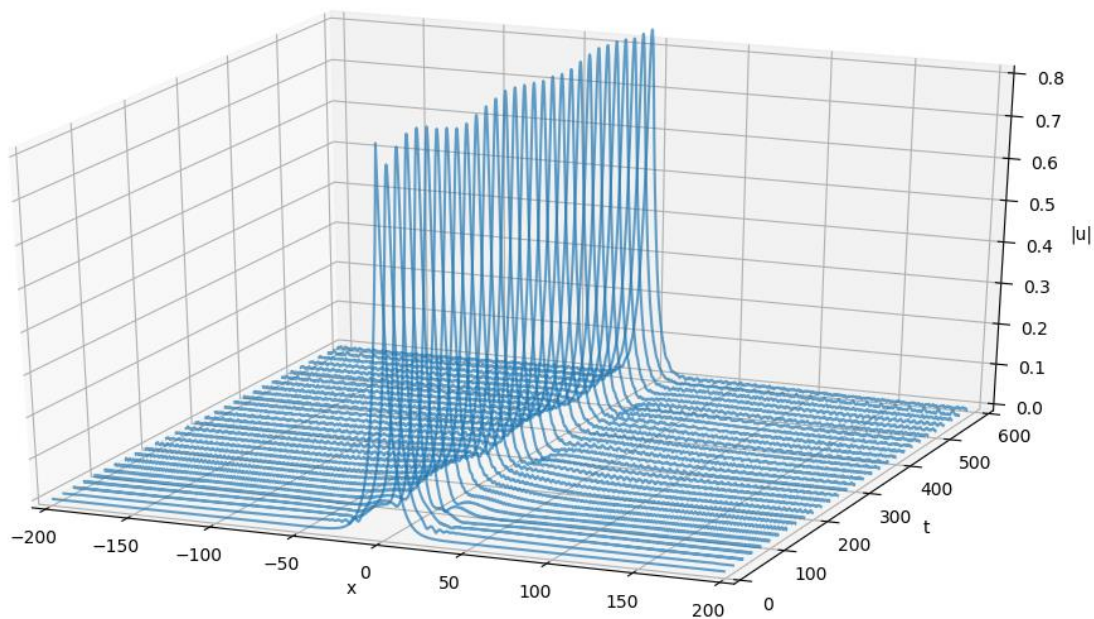


Рис.4.6.3. Профіль розв'язку рівняння при $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

При $\alpha = -1$ дефект дефокусуючий і світловий пучок розпадається, розв'язок нестійкий.

Розглянемо тепер рівняння лише з нелінійним дефектом. Для такого рівняння $V(z, E) = -\beta|E(z, t)|^2\delta(z)$. При $\sigma > 0$ дефект фокусуючий і пучок поширюється вздовж дефектного шару. Розв'язок є стійким.

На відміну від лінійного дефекту, в даному випадку важливу роль відіграє тепер E_0 у початкового збурення, так як від нього залежить підсилення ($E_0 > 1$) дії дефекту або послаблення ($E_0 < 1$). Це також проявляється і в аналітичних розв'язках, так як для нелінійного дефекту E_0 залежить від ω .

Рис.4.6.4. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = 0.5$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = 5$.

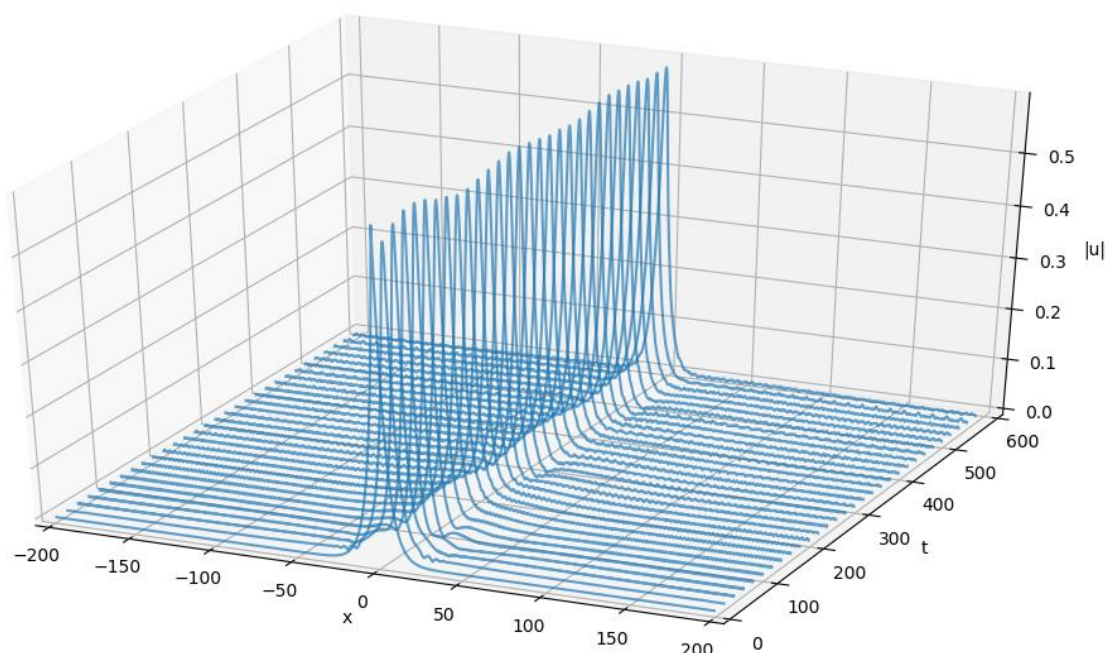


Рис.4.6.5. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = 1$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = 5$.

У випадку з нелінійним дефектом, в порівнянні з лінійним, ширину пучка можна вибрати довільною. При $\beta = 1$, $\varepsilon = 5$ розв'язок стійкий.

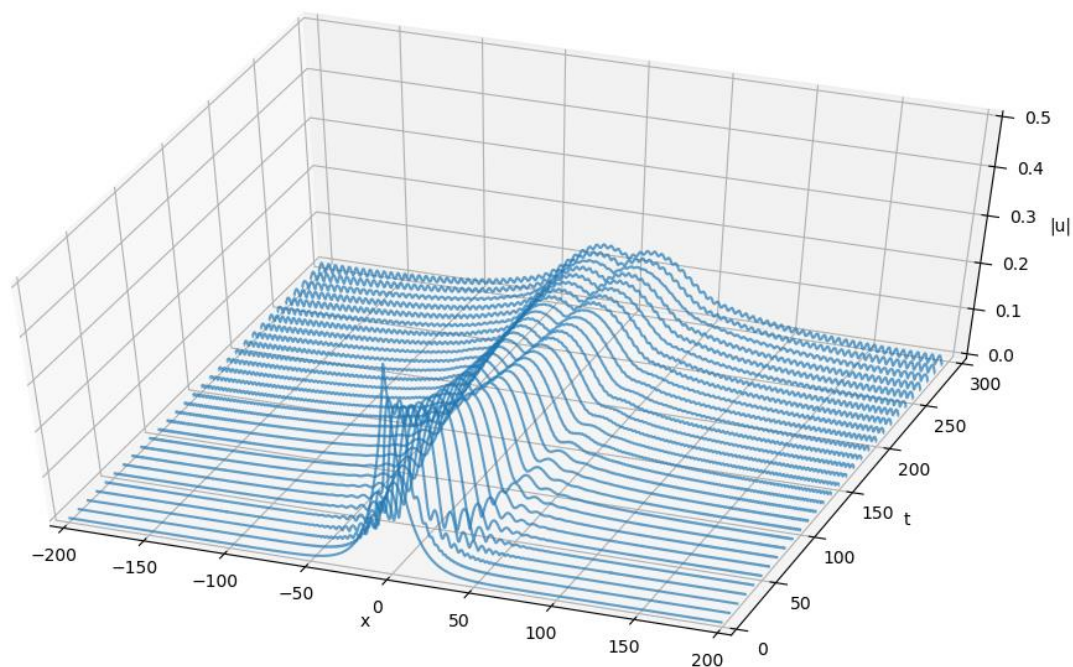


Рис.4.6.6. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = -1$, $\alpha = 0$, $\varepsilon = 10$.

При $\beta = -1$, $\varepsilon = 10$ розв'язок нестійкий і пучок розпадається. Внаслідок того, що в нелінійному потенціалі присутній квадрат поля, розпад пучка не такий швидкий, як в лінійному випадку.

Значний інтерес являє собою випадок з комбінованим дефектом та з різними знаками. В такому разі:

$$V(z, E) = -(\beta |E(z, t)|^2 + \alpha) \delta(z)$$

У будь-якому разі при $\beta, \alpha > 0$ з (4.6.2) видно, що потенціал являє собою суму лінійного і нелінійного, які, як зазначалося вище, є стійкими.

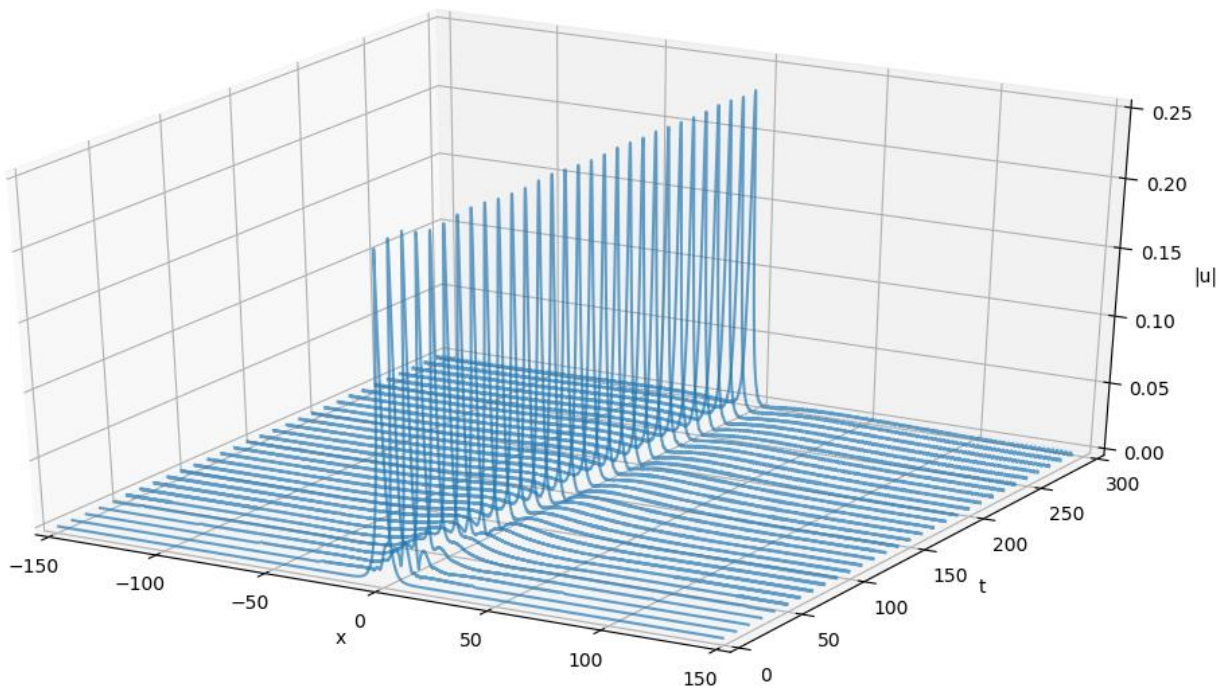


Рис.4.6.7. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 0.23$.

Аналогічно і для $\beta, \alpha < 0$, які є нестійкими.

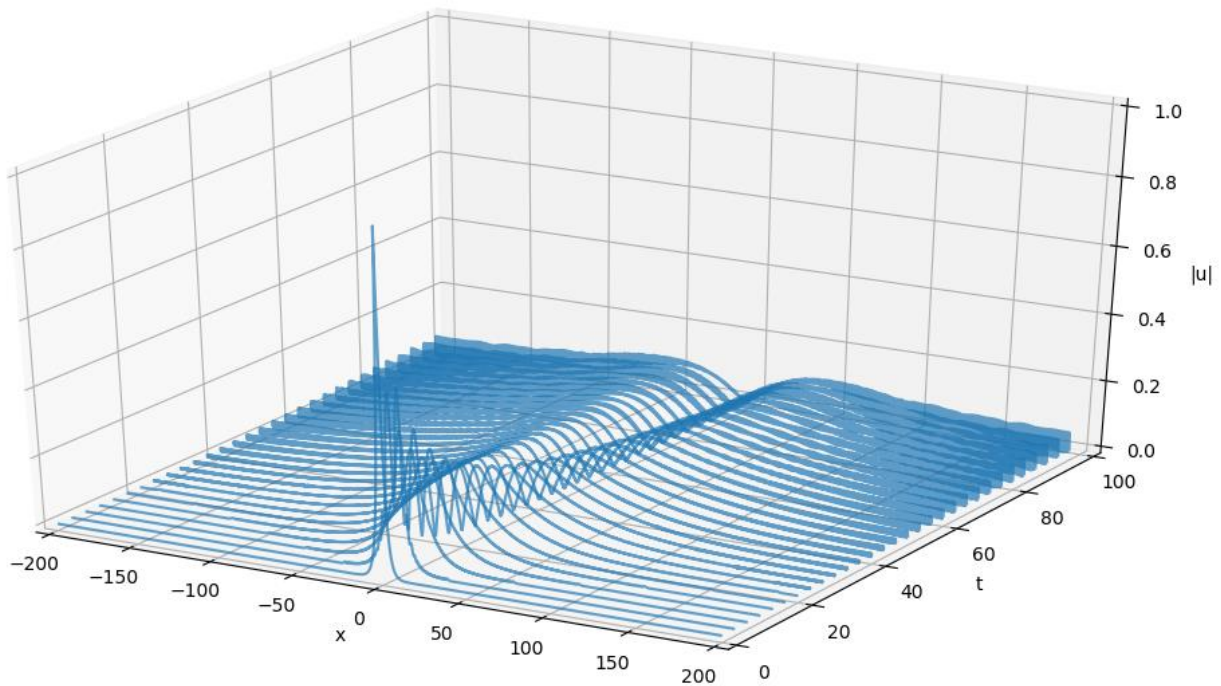


Рис.4.6.8. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = -1$, $\alpha = -1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 1$.

Для дефектів з різними знаками ситуація дещо інакша. Якщо сумарний потенціал притягуючий, то його значення повинно бути менше нуля. Тоді отримаємо оцінку: $\beta|E_0|^2 + \alpha > 0$, тобто

$$E_0 > \sqrt{-\alpha/\beta}, \quad \beta > 0 \quad (4.6.3a)$$

$$E_0 < \sqrt{-\alpha/\beta}, \quad \beta < 0 \quad (4.6.3b)$$

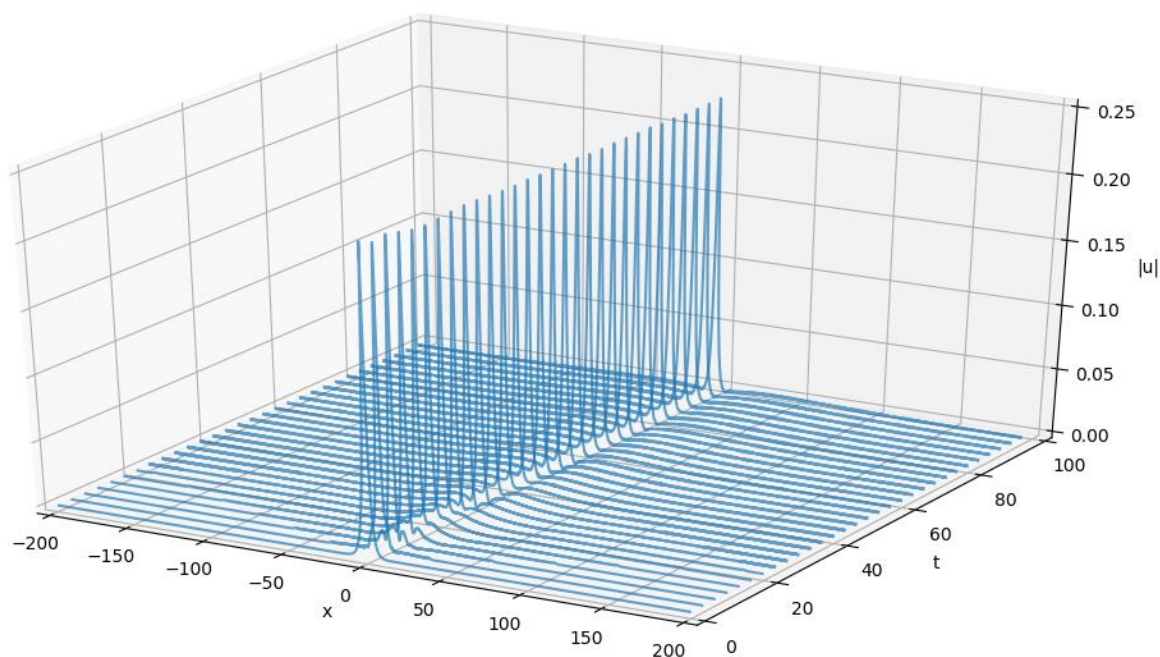


Рис.4.6.9. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = -1$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 0.23$.

Так як $E_0 < 1$, розв'язок на рис.4.6.9 є стійким.

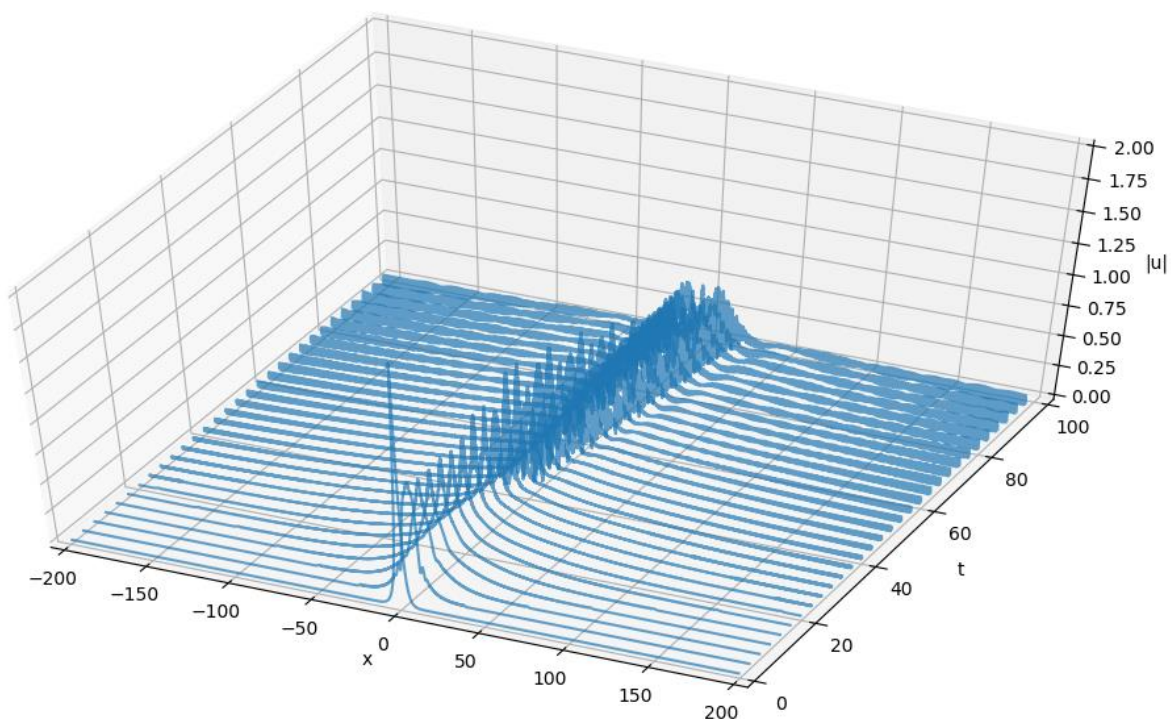


Рис.4.6.10. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = -1$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 2$.

А ось при тих самих значеннях потужностей дефектів, але з $E_0 > 1$ розв'язок являється вже нестійким в силу згаданих вище причин.

Якщо в обох дефектах змінити знаки, то замість умови (4.6.3б) буде виконуватися (4.6.3а) і стійким буде розв'язок з $E_0 = 2$, а нестійким з $E_0 = 0.23$.

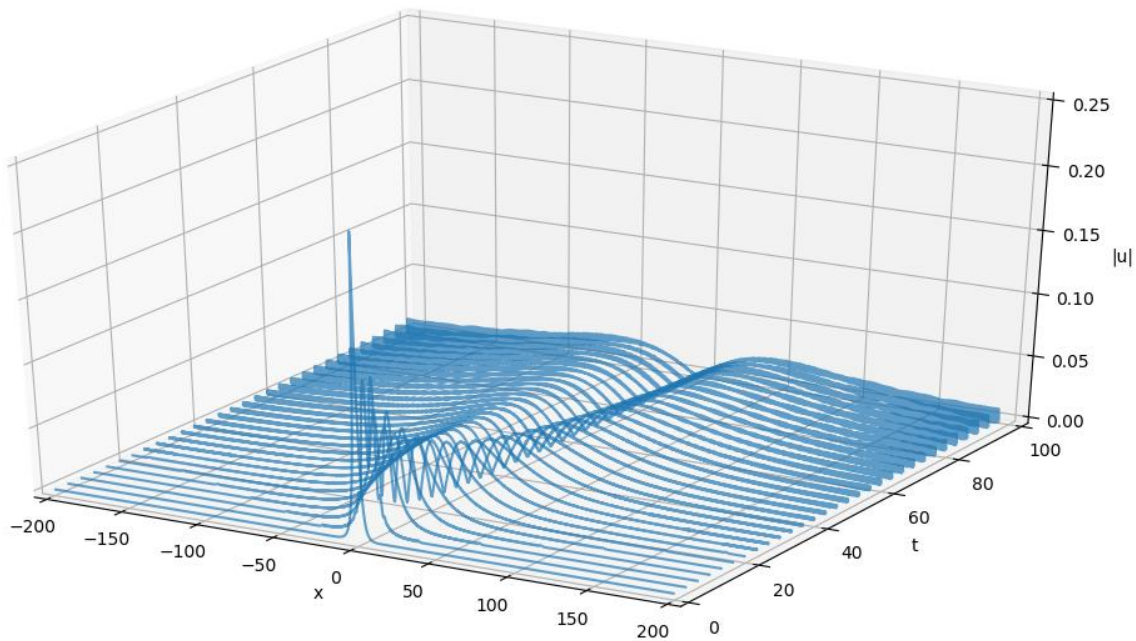


Рис.4.6.11. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = 1$, $\alpha = -1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 0.23$.

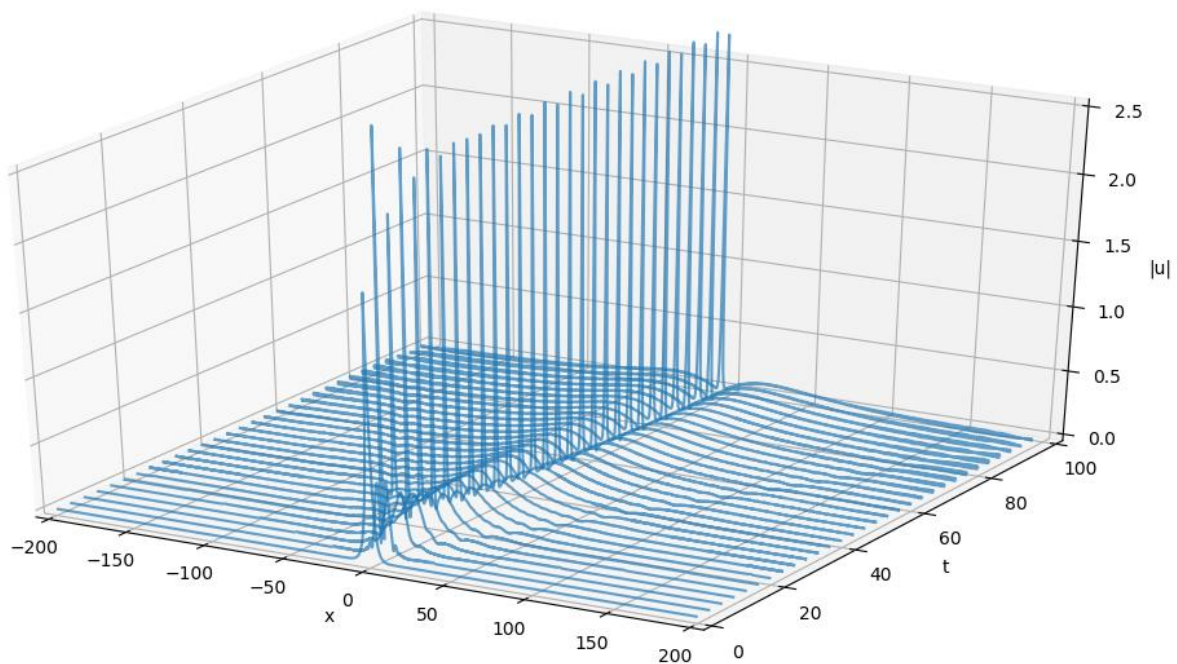


Рис.4.6.12. Профіль розв'язку рівняння при $\beta = 1$, $\alpha = -1$, $\varepsilon = 1.8$, $E_0 = 2$.

ВИСНОВКИ

В даній роботі за допомогою запропонованої аналітичної моделі в оптично-лінійному середовищі знайдені всі можливі солітонні стани, локалізовані поблизу нелінійного хвилеводу. Досліджено випадки, коли хвилевод описується лише нелінійним членом (4.2.1) і коли при описі хвилеводу (3.1.3) враховуються як лінійні, так і нелінійні вклади (всі можливі комбінації знаків параметрів σ і α). Показано, що солітонні стани, локалізовані поблизу нелінійного хвилеводу, можливі при будь-якого знаку ангармонізму (довільному знаку σ) у випадку наявності елементарних збуджень хвилеводу ($\alpha > 0$). Проте при взаємному відштовхуванні між елементарними збудженнями в хвилеводі ($\sigma = -1$), локалізовані стани можуть існувати лише у випадку $\alpha > 0$. Це означає, що локалізовані стани поблизу притягуючого хвилеводу можливі навіть при відштовхуючому характері взаємодії між збудженнями. Для всіх можливих локалізованих станів було виявлено та проаналізовано загальну кількість елементарних збуджень та загальну енергію системи.

За допомогою чисельної моделі була проаналізована стійкість локалізованих станів. Було показано, що при окремому розгляді кожного з дефектів при додатних значеннях потужностей локалізовані стани стійкі, при від'ємних значеннях нестійкі. Розглянуті випадки з різними комбінаціями лінійних та нелінійних, відштовхуючих та притягуючих дефектів. Отримані умови стійкості таких комбінованих станів (4.6.3а, б).

Ця система є першим кроком до вивчення локалізованих станів у середовищі з періодичним масивом паралельних плоских нелінійних хвилеводів (дефектних шарів), які описуються як лінійними, так і нелінійними членами. Запропонована модель може бути використана у широкому діапазоні фізичних застосувань: в нелінійній динаміці твердих тіл, фотонних і магнонних кристалах, модуляційних (шаруватих) середовищах з періодичною системою нелінійних хвилеводів (дефектних шарів), магнітних багат шарових структурах з масивом плоских магнітних дефектів і таке інше.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Chiao R.Y. Self-trapping of optical beams / R.Y. Chiao, E. Garmire, C.H. Townes // Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 479-482.
2. Zakharov V.E., Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 118-134.
3. Aceves A.B. Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays / A.B. Aceves, C.De Angelis, T. Peschel, R. Muschall, F. Lederer, S. Trillo, and S. Wabnitz // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53, № 1. – P. 1172-1189.
4. Gerasimchuk I.V. Spatial Localization of Nonlinear Waves in Layered and Modulated Media / I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev // Письма в ЖЭТФ. – 2007. – Т. 85, Вып. 10. – С. 594-598
5. Gerasimchuk I.V. Localization of Nonlinear Waves in Layered Media / I.V. Gerasimchuk, A.S. Kovalev // Fiz. Nizk. Temp. **26** (2000) 799-809.
6. Eisenberg H.S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays / H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A.R. Boyd, J.S. Aitchison // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81, No. 16. – P. 3383-3386.
7. Богдан М.М. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами / М.М. Богдан, И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев // ФНТ. – 1997. – Т. 23, № 2. – С. 197-207.
8. Gerasimchuk I.V. Spatial Localization of Light Flux in an Array of Nonlinear Optical Waveguides / I.V. Gerasimchuk, A.S. Kovalev // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2001. – Vol. 13, No. 44. – P. L885–L889.
9. Gerasimchuk I.V. Localized States and Their Stability in an Anharmonic Medium with a Nonlinear Defect / I.V. Gerasimchuk // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2015. – Vol. 121, No. 4. – P. 596–605.

10. Вахитов Н.Г. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности / Н.Г. Вахитов, А.А. Колоколов // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1973. – Т. XVI, № 7. – С. 1020-1028.
11. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах / А.С. Давыдов // Киев: Наук. думка, 1984. – 304 с.
12. Pitaevskii L. *Bose-Einstein Condensation* / L. Pitaevskii, S. Stringari // Oxford, New York, 2003.
13. Malomed B.A. Modulational instability of a wave scattered by a nonlinear center / B.A. Malomed, and M.Ya. Azbel // Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 47, No. 16. – P. 10402-10406.
14. Dror N. Solitons supported by localized nonlinearities in periodic media / N. Dror, and B.A. Malomed // Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 83, Iss. 3. – P. 033828 (21p).
15. Sakaguchi H. Solitons in combined linear and nonlinear lattice potentials / H. Sakaguchi and B.A. Malomed // Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 81, Iss. 1. – P. 013624 (9p).
16. Goodman R.H. Stopping light on a defect / R.H. Goodman, R.E. Slusher, M.I. Weinstein // J. Opt. Soc. Am. B. – 2002. – Vol. 19. – P. 1632–1635.
17. Kivshar Y.S. Localization decay induced by strong nonlinearity in disordered systems / Y.S. Kivshar, S.A. Gredeskul, A. Sánchez, L. Vázquez // Phys. Rev. Lett. 64 (15) (1990) 1693–1696.
18. Bronski J. Nonlinear scattering and analyticity properties of solitons / J. Bronski // J. Nonlin. Sci. 8 (2) (1998) 161–182.
19. Goodman R.H. Strong NLS soliton-defect interactions / R.H. Goodman, P.J. Holmes, M.I. Weinstein // Physica D. – 2004. – Vol. 192. – P. 215–248.
20. Goodman R.H. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: phase space transport in a two-mode model / R.H. Goodman, P.J. Holmes, M.I. Weinstein // Physica D. – 2002. – Vol. 161. – P. 21–44.
21. Cao X.D. Soliton–defect collisions in the nonlinear Schrödinger equation / X.D. Cao, B.A. Malomed // Phys. Lett. A 206 (1995) 177–182.

22. Albeverio S. Solvable Models in Quantum Mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høgh-Krohn, H. Holden // Springer-Verlag, New York, 1988.
23. Weder R. The $W_{k,p}$ -Continuity of the Schrödinger Wave Operators on the Line / R. Weder // Commun. Math. Phys. – 1999. – Vol. 208. – P. 507–520.
24. Kato T. Commutator estimates and the Euler and Navier–Stokes equations / T. Kato, G. Ponce // Commun. Pure Appl. Math. 41 (1988) 891–907.
25. Rose H.A. On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential / H.A. Rose, M.I. Weinstein // Physica D 30 (1988) 207–218.
26. Weinstein M.I. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations / M.I. Weinstein // Commun. Pure Appl. Math. 39 (1986) 51–68.
27. Soffer A. Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations / A. Soffer, M.I. Weinstein // Commun. Math. Phys. 133 (1990) 119–146.
28. Soffer A. Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations. II. The case of anisotropic potentials and data / A. Soffer, M.I. Weinstein // J. Diff. Eqns. 98 (1992) 376–390.
29. Pillet C.-A. Invariant manifolds for a class of dispersive, Hamiltonian, partial differential equations / C.-A. Pillet, C.E. Wayne // J. Diff. Eqns. 141 (1997) 310–326.
30. Buslaev V.S. Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: states close to a soliton / V.S. Buslaev, G. Perel'man // St. Petersburg Math. J. 4 (1993) 1111–1142.
31. Weder R. Center manifold for nonintegrable nonlinear Schrödinger equations on the line / R. Weder // Commun. Math. Phys. 215 (2000) 343–356.
32. Fei Z. Numerical simulations of nonlinear Schrödinger systems: a new conservative scheme / Z. Fei, V.M. Pérez-García, L. Vázquez // Appl. Math. Comput. 71 (1995) 165–177.
33. Mills D.L. Gap solitons in nonlinear periodic structures / D.L. Mills, S.E. Trullinger // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 36, № 2. – P. 947-952.
34. Kovalev A.S Bifurcation picture for gap solitons in nonlinear modulated systems / A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 2309-2316.

35. Peschel U. Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays / Peschel U., Morandotti R., Aitchison J.S., Eisenberg H.S., Silberberg Y. // Appl. Phys. Lett. – 1999. – Vol. 75, № 10. – P. 1348-1350.
36. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
37. Hennig D., Wave propagation in periodic nonlinear dielectric superlattices / D. Hennig, H. Gabriel, G.P. Tsironis, M. Molina // Appl. Phys. Lett. – 1994. – Vol. 64, № 22. – P. 2934-2936.
38. Chan Li Q. Wave propagation in nonlinear photonic band-gap materials / Li Q., Chan C.T., Ho K.M., Soukoulis C.M. // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53, № 23. – P. 15577-15585.
45. Gaididei Yu.B. Two-dimensional effects in nonlinear Kronig-Penney models / Yu.B. Gaididei, P.L. Christiansen, K.O. Rasmussen, M. Johansson // Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55, № 20. – P. R13365-R13368.
40. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику / А.М. Косевич, А.С. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 1989. – 304 с.
41. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 6-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с. : ил.
42. Калиткин Н. Н. Численные методы: учеб. пособие./ Калиткин Н. Н. - 2-е изд., исправленное. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 592 с.

ДОДАТОК А

Код програми на Java для розв'язування нелінійного рівняння Шредінгера

Абстрактний клас Problem

```
package problems;

import java.io.*;

public abstract class Problem {
    private final String OUTPUT_FOLDER = "output/";

    public abstract void setInitialConditions();

    public void compute() {
        setInitialConditions();
        writeToFile();
        while (true) {
            try {
                System.out.println("Press enter to do next iteration");
                System.in.read();
            } catch (IOException e) {
                e.printStackTrace();
            }
            computeIteration();
            writeToFile();
        }
    }

    public abstract void writeToFile();

    protected void writeToFile(String fileName, double from, double dx, int countOfPoints,
double[]... data) {
        File file = new File(OUTPUT_FOLDER + fileName);
        try (OutputStream out = new FileOutputStream(file);
            Writer writer = new OutputStreamWriter(out)) {
            for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
                writer.append(String.valueOf(i * dx + from));
                writer.append(" ");
                for (int j = 0; j < data.length; j++) {
                    writer.append(String.valueOf(data[j][i]));
                    writer.append(" ");
                }
                writer.append(System.lineSeparator());
            }
        } catch (IOException e) {
            System.out.println("You have not access to file");
        }
    }

    protected abstract void computeIteration();
}
```

Абстрактний клас QuantumProblem

```
package problems;

import java.io.IOException;

public abstract class QuantumProblem extends Problem {
    @Override
    public void compute() {
```

```

        setInitialConditions();
        writeToFile();
        computeNormCondition();
        while (true) {
            try {
                System.out.println("Press enter to do next iteration");
                System.in.read();
            } catch (IOException e) {
                e.printStackTrace();
            }
            computeIteration();
            writeToFile();
            computeNormCondition();
        }
    }

    protected abstract void computeNormCondition();
}

```

Клас NonlinearSchrodingerCrankNicholsonMethod

```

package problems.nls;

import static math.Complex.*;
import static java.lang.Math.*;

import math.Complex;
import problems.QuantumProblem;

import java.io.*;

public class NonlinearSchrodingerCrankNicholsonMethod extends QuantumProblem {
    private final String fileName = "crank_nicholson_3d_method.txt";

    private final int countOfPoints = 5000;
    private final double tFinal = 300;
    private final int countOfLines = 30;
    private final int countOfWriting;
    private final boolean stepByStep = false;

    //Equation coefficients
    private final double dispersionCoeff = 0.5; //b
    private final double nonlinearCoeff = 1; //g
    private final double nonlinearDefectCoeff = -1; // d
    private final double linearDefectCoeff = 0; //epsilon
    private final double nonlinearMedium = 0;
    private final double deltaFunctionAmplitude = 1; //1

    //Inputs: soliton
    private final double boundaryCoordinate = 200;
    private final double relativeCoordinateOfWaveCenter = 0.5;
    private final double waveWidth = 10; //10
    private final double waveVelocity = 0; //4
    private double waveInitialAmplitude = 1; //use it if g = 0

    private final Complex leftBoundaryCondition = ZERO;
    private final Complex rightBoundaryCondition = ZERO;

    //Inputs: defect
    private final double relativeCoordinateOfDefect = 0.5;
    private final double defectWidth = 1.5;

    //For calculations
    private final double dx;
    private final double dt;
    private double t;
}

```

```

private final double coordinateOfWaveCenter;
private final double coordinateOfDefect;

private Complex[] waveFunction;
private Complex[] analyticalSolution;
private double waveVector;
private double frequency;
private boolean isBright;

private double[] deltaFunction;
private double[] linearTerm;
private double[] nonlinearTerm;
private Complex[] linearAddition;
private Complex[] nonlinearAddition;

private Complex a;
private Complex[] b;
private Complex c;
private Complex[] d;
private Complex[] p;
private Complex[] q;

public NonlinearSchrodingerCrankNicholsonMethod() {
//      if (nonlinearCoeff != 0) {
//          isBright = dispersionCoeff / nonlinearCoeff >= 0 ? true : false;
//          if (isBright) {
//              waveInitialAmplitude = dispersionCoeff / (nonlinearCoeff * pow(waveWidth,
2));
//              frequency = pow(waveVelocity, 2) / (4 * dispersionCoeff) -
dispersionCoeff / pow(waveWidth, 2);
//          } else {
//              waveInitialAmplitude = -dispersionCoeff / (nonlinearCoeff *
pow(waveWidth, 2));
//              frequency = pow(waveVelocity, 2) / (4 * dispersionCoeff) +
dispersionCoeff / pow(waveWidth, 2);
//          }
//      }
    waveVector = waveVelocity / (2 * dispersionCoeff);
    dx = PI / (50 * waveVector);
    dt = dx / waveVector;
    dx = 2 * boundaryCoordinate / (double) countOfPoints;
    dt = 3*pow(10,-4);
    dt = 0.01;
    countOfWriting = (int) (tFinal / (dt * countOfLines));
    countOfWriting = 500;
    coordinateOfWaveCenter = (countOfPoints - 1) * dx * relativeCoordinateOfWaveCenter
- boundaryCoordinate;
    coordinateOfDefect = (countOfPoints - 1) * dx * relativeCoordinateOfDefect -
boundaryCoordinate;
    a = new Complex(0, dt * dispersionCoeff / (2 * pow(dx, 2)));
    c = new Complex(0, dt * dispersionCoeff / (2 * pow(dx, 2)));
    t = -dt;

    waveFunction = new Complex[countOfPoints];
    analyticalSolution = new Complex[countOfPoints];
    deltaFunction = new double[countOfPoints];
    linearTerm = new double[countOfPoints];
    nonlinearTerm = new double[countOfPoints];
    linearAddition = new Complex[countOfPoints];
    nonlinearAddition = new Complex[countOfPoints];
    b = new Complex[countOfPoints];
    d = new Complex[countOfPoints];
    p = new Complex[countOfPoints];
    q = new Complex[countOfPoints];
}

@Override
public void setInitialConditions() {
    computeAnalyticalSolution();
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {

```



```

        double x = i * dx - boundaryCoordinate;

//      waveFunction[i] = multiply(waveInitialAmplitude, exp(new Complex(-pow((x -
coordinateOfWaveCenter) / waveWidth, 2),
//      waveVector * x)));
//      waveFunction[i] = new Complex(waveInitialAmplitude / cosh(abs(x) /
waveWidth), 0);
//      waveFunction[i] = new Complex(waveInitialAmplitude / cosh(abs(x) / waveWidth
//      + 1 / tanh(linearDefectCoeff / waveInitialAmplitude)), 0);
//      waveFunction[i] = multiply(waveInitialAmplitude / cosh((x -
coordinateOfWaveCenter) / waveWidth),
//      exp(new Complex(0, waveVector * x)));
//      waveFunction[i] = multiply(waveInitialAmplitude, exp(new
Complex(linearDefectCoeff / 2 * abs(x), 0))); //waveWidth should be <= 2/linearDefectCoeff
        waveFunction[i] = multiply(sqrt(2.0 / (-nonlinearDefectCoeff * waveWidth)),
        exp(new Complex(-abs(x) / waveWidth, 0))); //waveWidth can be arbitrary
//      waveFunction[i] = multiply(sqrt((2.0 / waveWidth - linearDefectCoeff) / (2 *
nonlinearDefectCoeff)),
//      exp(new Complex(-abs(x) / waveWidth, 0))); //waveWidth can be
arbitrary

        deltaFunction[i] = deltaFunctionAmplitude / (defectWidth * sqrt(PI)) * exp(-
pow((x - coordinateOfDefect) / defectWidth, 2));
        linearTerm[i] = linearDefectCoeff * deltaFunction[i];
        nonlinearTerm[i] = nonlinearCoeff * (nonlinearMedium + nonlinearDefectCoeff *
deltaFunction[i]);
//      nonlinearTerm[i] = 2 * nonlinearCoeff * nonlinearDefectCoeff * (exp(-pow((x +
15) / defectWidth, 2))
//      + exp(-pow((x - 15) / defectWidth, 2)));
        linearAddition[i] = multiply(dt * linearTerm[i] / 2, EIN);
        nonlinearAddition[i] = multiply(dt * nonlinearTerm[i] / 2, EIN);
    }
}

@Override
public void compute() {
    if (stepByStep) {
        super.compute();
    } else {
        final String outputFolder = "output/";
        new File(outputFolder + fileName).delete();
        setInitialConditions();
        appendToFile();
        computeNormCondition();
        while (t < tFinal) {
            computeIteration();
            appendToFile();
            computeNormCondition();
        }
    }
}

@Override
public void computeNormCondition() {
    double totalIntensity = 0;
    double sumBeforeBarrier = 0;
    double sumAfterBarrier = 0;
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        double waveFunctionModulus = waveFunction[i].getSquaredModulus();
        totalIntensity += waveFunctionModulus;
        if (i * dx - boundaryCoordinate < coordinateOfDefect) {
            sumBeforeBarrier += waveFunctionModulus;
        } else {
            sumAfterBarrier += waveFunctionModulus;
        }
    }
    System.out.println("t = " + t);
    System.out.println("Total intensity = " + totalIntensity);
    System.out.println("Reflected = " + sumBeforeBarrier / totalIntensity * 100 + "

```

```

    });
    System.out.println("Transmitted = " + sumAfterBarrier / totalIntensity * 100 + "
    %");
    System.out.println(System.lineSeparator());
}

@Override
public void writeToFile() {
    double[] waveFunctionRealPart = getWaveFunctionRealPart();
    double[] waveFunctionImagePart = getWaveFunctionImagePart();
    double[] linearPotential = getLinearPotential();
    double[] nonlinearPotential = getNonlinearPotential();
    double[] analyticalRealPart = getAnalyticalRealPart();
    double[] analyticalSquaredModulus =
getAnalyticalSquaredModulus(analyticalSolution);
    double[] modulus = getModulus();
    double[] squaredModulus = getSquaredModulus();
    double[] time = getTime();
    writeToFile("crank_nicholson_step_by_step_method.txt", -boundaryCoordinate, dx,
countOfPoints, squaredModulus, analyticalSquaredModulus);
}

private void appendToFile() {
    double[] modulus = getModulus();
    double[] real = getWaveFunctionRealPart();
    double[] analyticalModulus = getAnalyticalModulus(analyticalSolution);
    appendToFile(fileName, -boundaryCoordinate, dx, countOfPoints, modulus,
analyticalModulus);
}

private void appendToFile(String fileName, double from, double dx, int countOfPoints,
double[]... data) {
    final String outputFolder = "output/";
    try (Writer writer = new BufferedWriter(new FileWriter(outputFolder + fileName,
true))) {
        for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
            writer.append(String.valueOf(i * dx + from));
            writer.append(" ");
            for (int j = 0; j < data.length; j++) {
                writer.append(String.valueOf(data[j][i]));
                writer.append(" ");
            }
            writer.append(System.lineSeparator());
        }
    } catch (IOException e) {
        System.out.println("You have not access to file");
    }
}

private double[] getTime() {
    double[] time = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        time[i] = t;
    }
    return time;
}

private double[] getModulus() {
    double[] modulus = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        modulus[i] = waveFunction[i].getModulus();
    }
    return modulus;
}

private Complex[] getNonlinearAnalyticalSolution() {
    Complex[] nonlinearAnalyticalSolution = new Complex[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        double x = i * dx - boundaryCoordinate;
        nonlinearAnalyticalSolution[i] = exp(new Complex(-nonlinearDefectCoeff / 2 *

```

```

abs(x), pow(nonlinearDefectCoeff, 2) * t / 4));
    }
    return nonlinearAnalyticalSolution;
}

private double[] getAnalyticalSquaredModulus(Complex[] function) {
    double[] squaredModulus = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        squaredModulus[i] = function[i].getSquaredModulus();
    }
    return squaredModulus;
}

private double[] getAnalyticalModulus(Complex[] function) {
    double[] squaredModulus = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        squaredModulus[i] = function[i].getModulus();
    }
    return squaredModulus;
}

private double[] expAbs() {
    double[] expAbs = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        double x = i * dx - boundaryCoordinate;
        expAbs[i] = -linearDefectCoeff / 2 * abs(x);
    }
    return expAbs;
}

private double[] getSquaredModulus() {
    double[] squaredModulus = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        squaredModulus[i] = waveFunction[i].getSquaredModulus();
    }
    return squaredModulus;
}

private double[] getAnalyticalRealPart() {
    double[] analyticalRealPart = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        analyticalRealPart[i] = analyticalSolution[i].getReal();
    }
    return analyticalRealPart;
}

private double[] getWaveFunctionRealPart() {
    double[] waveFunctionRealPart = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        waveFunctionRealPart[i] = waveFunction[i].getReal();
    }
    return waveFunctionRealPart;
}

private double[] getWaveFunctionImagePart() {
    double[] waveFuctionImagePart = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        waveFuctionImagePart[i] = waveFunction[i].getImage();
    }
    return waveFuctionImagePart;
}

private double[] getLinearPotential() {
    double[] potential = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        potential[i] = -linearDefectCoeff * deltaFunction[i];
    }
    return potential;
}

```

```

private double[] getNonlinearPotential() {
    double[] potential = new double[countOfPoints];
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        potential[i] = nonlinearDefectCoeff * deltaFunction[i];
    }
    return potential;
}

@Override
public void computeIteration() {
    for (int j = 0; j < countOfWriting; j++) {
        computeCoefficients();
        computeWaveFunction();
        computeAnalyticalSolution();
    }
}

private void computeAnalyticalSolution() {
    t += dt;
    for (int i = 0; i < countOfPoints; i++) {
        double x = i * dx - boundaryCoordinate;
        analyticalSolution[i] = multiply(waveInitialAmplitude / cosh((x -
coordinateOfWaveCenter - waveVelocity * t) / waveWidth),
        exp(new Complex(0, waveVector * x - frequency * t)));
//        analyticalSolution[i] = exp(new Complex(-linearDefectCoeff * abs(x) / 2,
//        pow(linearDefectCoeff, 2) / 4 * t));
    }
}

private void computeWaveFunction() {
    waveFunction[countOfPoints - 1] = divide(
        subtract(multiply(2, rightBoundaryCondition), q[countOfPoints - 2]),
        add(1, p[countOfPoints - 2]));
    for (int i = countOfPoints - 2; i >= 0; i--) {
        waveFunction[i] = add(
            multiply(
                waveFunction[i + 1],
                p[i]
            ),
            q[i]
        );
    }
}

private void computeCoefficients() {
    p[0] = new Complex(-1, 0);
    q[0] = multiply(2, leftBoundaryCondition);
    for (int i = 1; i < countOfPoints - 1; i++) {
        b[i] = computeB(i);
        d[i] = computeD(i);
        p[i] = computeP(i);
        q[i] = computeQ(i);
    }
}

private Complex computeB(int i) {
    return add(new Complex(1, 0),
        multiply(2, a),
        multiply(-waveFunction[i].getSquaredModulus(), nonlinearAddition[i]),
        negative(linearAddition[i]));
}

private Complex computeD(int i) {
    return add(
        multiply(
            a,
            add(waveFunction[i - 1], waveFunction[i + 1])
        ),
        multiply(

```

```

        subtract(new Complex(2, 0), b[i]),
        waveFunction[i]
    )
    );
}

private Complex computeP(int i) {
    return divide(
        a,
        subtract(
            b[i],
            multiply(
                c,
                p[i - 1]
            )
        )
    );
}

private Complex computeQ(int i) {
    return divide(
        add(
            d[i],
            multiply(
                c,
                q[i - 1]
            )
        ),
        subtract(
            b[i],
            multiply(
                c,
                p[i - 1]
            )
        )
    );
}
}

```

ДОДАТОК Б

Код програми на Python для побудови 3D-графіків

```

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.collections import LineCollection
from matplotlib.colors import colorConverter
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

# def cc(arg):
#     return colorConverter.to_rgba(arg, alpha=0.6)

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

# pathToFile = 'D:/Desktop/'
pathToFile = 'D:\Programming\projects\Physics-calculations\output\\'
filename = 'crank_nicholson_3d_method.txt'
columnNoForReading = 1
countOfPoints = 5000
tFinal = 300
boundaryCoordinate = 150
waveFunctionAmplitude = 0.5
countOfTimeSteps = 30
dt = float(tFinal) / float(countOfTimeSteps)

t = np.arange(0, tFinal, dt)

print 'Reading started'
waveFunction = []
x = []
with open(pathToFile + filename) as file:
    lines = file.read().splitlines()

planePlot = []
for timeStep in xrange(countOfTimeSteps):
    for i in xrange(countOfPoints):
        splittedLine = lines[i + timeStep * countOfPoints].rsplit(' ')
        x.append(splittedLine[0])
        waveFunction.append(splittedLine[columnNoForReading])
    planePlot.append(list(zip(x, waveFunction)))
    x = []
    waveFunction = []
print 'Reading finished'

print 'Plotting started'
poly = LineCollection(planePlot)
poly.set_alpha(0.7)
ax.add_collection3d(poly, zs=t, zdir='y')

ax.set_xlabel('x')
ax.set_xlim3d(-boundaryCoordinate, boundaryCoordinate)
ax.set_ylabel('t')
ax.set_ylim3d(0, tFinal)
ax.set_zlabel('|u|')
ax.set_zlim3d(0, waveFunctionAmplitude)

mng = plt.get_current_fig_manager()
mng.window.state('zoomed')
plt.show()
print 'Plotting finished'

```